Comment enseigner les mathématiques sous l'éclairage de la pédagogie des gestes mentaux ?

Récit d'expériences et de convictions

Nathalie ERARD

01/10/2012

I . Introduction 3
II. Rappels théoriques de gestion mentale : 3
a) Définitions: 4
b) La spécificité des objets mathématiques sous le regard de la gestion mentale : 5
c) La spécificité de la démarche mathématique au regard de la gestion mentale : 6
1. l'évocation : 6
2. Le geste d'attention : 7
3. Le geste de compréhension : 7
4.Le geste de mémorisation : 8
5. Le geste de réflexion : 8
6.Le geste d'imagination : 8
III. Les incontournables de mon métier : 8
a) Mon métier de professeur de Mathématiques tel que je l'envisage dans ses finalités : 8
b) Les moyens que je me donne : 10
1. En continu : 10
2. En début d'année : 12
3. En début de chapitre, introduire la notion : 13
4. A chaque cours : 14
5. En fin de chapitre : faire faire aux élèves la synthèse de ce qui a été découvert. 15
6. A la veille d'un contrôle : Imaginer le contenu du contrôle et ses différentes formes possibles. 15
7. En correction d'exercices : 15
IV. Récits de mises en pratique : 15
a) La découverte du théorème de Thalès en quatrième : 15
1. Première partie : évoquer et mémoriser la configuration de Thalès : 15
2. Deuxième partie : découvrir la conclusion du théorème de Thalès 17
3. Troisième partie : évoquer la conclusion du théorème de Thalès 19
4. Dialogue pédagogique sur Thalès 22
b) Comment mémoriser les propriétés de géométrie ? 26
c) Comment constituer le sens du centimètre carré en sixième ? 31
1. Tracer une figure d'aire égale à 1 cm^2 puis une figure d'aire égale à 3 cm^2 : 31
2. La définition du centimètre carré : 33
3. Le centimètre carré dans une ligne courbe : 35
CONCLUSION 37
ANNEXES : 38
Annexe 1 : Schéma de synthèse sur les quadrilatères 39
Annexe 2 : Contrat de début d'année 40
Annexe 3 : article sur l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique 41
Annexe 4 : Des cm^2 dans des lignes courbes : 44
BIBLIOGRAPHIE 45

I . Introduction

J’ai décidé de devenir enseignante en Mathématiques en 1995, alors que j’étais devenue maman de trois jeunes enfants âgés de 3 ans à 1 mois et que j’avais éprouvé un profond bonheur à observer mes enfants prendre possession du monde, chacun à leur manière. J’ai éprouvé une grande joie à les accompagner et je désirais profiter d’eux tout en ayant une vie professionnelle. L’enseignement s’offrait à moi car j’avais eu, par l’expérience de ma famille, la confirmation de mon désir de transmettre et de partager avec des enfants. J’ai donc décidé de quitter mon métier d’ingénieur technico-commercial que j’avais exercé pendant 10 ans chez IBM pour me préparer au concours du Capes externe de Mathématiques. Ce ne fut pas facile, mais mes acquis de classes préparatoires m’ont porté et les jeunes étudiants et les enseignants de l’IUFM m’ont accueilli avec beaucoup de gentillesse, malgré mes nombreuses contraintes horaires !

J’enseigne aujourd’hui depuis 12 ans après avoir séjourné à l’étranger. En 2006, je me suis sentie très démunie devant les difficultés de mes élèves pourtant pleins de bonne volonté. Ils ne réussissaient pas à apprendre efficacement et je n’arrivais pas à les aider. Je cherchais des outils pour les rejoindre et les accompagner dans leurs difficultés. J’ai découvert la gestion mentale par un stage MAFPEN qui ne fut jamais reconduit, ni même autorisé en formation d’établissement alors que j'avais mobilisé 15 collègues volontaires ! J’ai découvert la structure Initiative et Formation par une amie en 2007 et en parallèle, la même année, je me suis inscrite au master professionnel de didactique des mathématiques que j’ai obtenu en 2009.

Devoir mener ces deux formations de front, plus la gestion de mes classes et une famille de quatre enfants a parfois été frustrant car j’avais l’impression de ne pas tirer un bénéfice réfléchi des expériences que je menais mais peu à peu, à force d'expérimentations, des découvertes se sont ancrées en convictions. Aujourd’hui, en regardant en arrière, je peux mesurer le chemin parcouru et les réels changements de pratiques que j’ai mis en place. Le travail demandé dans le cadre de la formation de praticien m’a permis de revenir à la source de l’enseignement d’Antoine de La Garanderie et de mieux appréhender son œuvre par la richesse des modules de formation que nous avons reçus et par le partage d’expériences avec les formateurs et les stagiaires.

Je voudrais, dans ce mémoire, exprimer et illustrer ces révélations profondes que j’ai pu vivre et qui m’ont permis de redonner sens à mon métier d’enseignante.

Je vais tout d'abord procéder à quelques rappels théoriques de gestion mentale appliquée au domaine des mathématiques avant de décrire ce que je considère aujourd'hui comme les incontournables de mon métier.
Puis j'illustrerai ma pratique par le récit d'un cours sur le théorème de Thalès, la description de propositions de démarches mentales pour mémoriser une propriété de géométrie et enfin je décrirai une séance sur la constitution du sens du centimètre carré en sixième.

II. Rappels théoriques de gestion mentale :

Le livre " Vocabulaire de la gestion mentale" paru aux éditions Chronique Sociale est une référence pour approcher avec une formulation actuelle les concepts fondamentaux de la Gestion Mentale, théorie fondée par les travaux d'expérimentation et de recherche d'Antoine de La Garanderie.

a) Définitions:

Je renvoie mon lecteur aux définitions précises et rigoureuses citées dans cet ouvrage.
Néanmoins , je voudrais dégager les mots clés de la théorie d'Antoine de La Garanderie qui sont au cœur de la démarche d'apprentissage:

L'évocation : "*Objet mental constitué et produit dans le prolongement d'une activité perceptive",* qui peut être décrit selon une palette de caractéristiques décrivant sa nature (tactile, verbale, auditive ou visuelle), ses paramètres (de reproduction sous une forme concrète (P1), de reproduction sous la forme de codes (P2), de conception avec des liens logiques (P3) ou avec des liens originaux (P4)), le codage en première personne ou troisième personne et le cadre d'espace, de temps ou de mouvement dans lequel va se placer cette évocation. [1]
Pour que cet objet mental soit stable, complet et fiable, il est nécessaire de faire des allers et retours entre l'objet réel à percevoir et l'objet mental.

Le dialogue pédagogique : *"Le dialogue pédagogique est un entretien spécifique permettant de faire émerger à la conscience d'un sujet les habitudes mentales qu'il déploie au cours de la réalisation d'une tâche précise. La mise en évidence des moyens pratiqués est favorisée par la démarche introspective."*[2]

et les 5 gestes d'apprentissages :

Le geste d'attention : « *Nous affirmons que le geste mental d'attention est intrinsèquement défini par le projet de faire exister mentalement en images* (visuelles, auditives ou verbales) *ce que l'on perçoit et par l'exécution de ce projet."* [3] La notion de projet est ici fondamentale et le projet précède la perception. Il en résulte pour l'enseignant la nécessité de respecter cette étape en proposant explicitement à l'élève de se mettre en projet de...

Le geste de compréhension : "*Acte de connaissance dont la visée de sens implique le projet de comparer des évoqués de nature visuelle, auditive ou verbale en vue de dégager les rapports d'analogie (similitudes ou différences), d'attribution (fusion, exclusion ou inclusion), de sériation spatio-temporelle."*[4]
Ce travail se fait sur les évoqués, fruits du geste d'attention.

Le geste de mémorisation : " *Acte de connaissance impliquant une action volontaire d'un sujet qui place ce qu'il veut soustraire de l'oubli dans "un imaginaire d'avenir" qui deviendra lieu de leur conservation. Ce lieu mental doit accueillir la présence des évoqués, images mentales, qui ont été élaborés lors du geste d'attention."* [5]

Le geste de réflexion : "*Acte de connaissance par lequel la conscience fait un retour sur des acquis évoqués et mémorisés auparavant , dans le but de spécifier et de préciser le sens d'un objet de connaissance."* [6]. Ce travail se fait sur les évoqués.

[1] J.P Gaté, A.Géninet, M.Giroul, T.Payen de La Garanderie, Vocabulaire de la gestion mentale, p 30 et 58
[2] J.P Gaté, A.Géninet, M.Giroul, T.Payen de La Garanderie, Vocabulaire de la gestion mentale, p25
[3] Antoine de La Garanderie, Pédagogie des moyens d'apprendre, p 24 -25
[4] J.P Gaté, A.Géninet, M.Giroul, T.Payen de La Garanderie, Vocabulaire de la gestion mentale, p 19
[5] J.P Gaté, A.Géninet, M.Giroul, T.Payen de La Garanderie, Vocabulaire de la gestion mentale, p 50
[6] J.P Gaté, A.Géninet, M.Giroul, T.Payen de La Garanderie, Vocabulaire de la gestion mentale, p 66

Le geste d'imagination : *"L'imagination est toujours présente pour tout projet d'évocation mais son projet est déterminé à vouloir ou reproduire (imagination reproductrice guidée par la mémorisation), ou s'investir de façon personnelle (imagination créatrice)."*[7]

b) La spécificité des objets mathématiques sous le regard de la gestion mentale :

Les mathématiciens ont observé le monde extérieur avec les liens logiques de similitudes et de différences et ont défini des objets abstraits, de pure pensée qui n'ont pas d'existence réelle.
La géométrie étudiée au collège a été élaborée au troisième siècle avant Jésus Christ par Euclide. Il a défini la droite comme ce qui a une longueur mais pas d'épaisseur, or elle est pourtant représentée par un trait sur nos tableaux !
Une figure est donc toujours fausse, elle est la concrétisation de l'abstraction manipulée par le mathématicien pour guider son raisonnement, à la différence des sciences de la vie et de la terre ou des sciences physiques pour lesquelles le schéma est une modélisation de la réalité,
une abstraction du concret.
Le mathématicien va donc projeter sa théorie sur la réalité pour prouver ses caractéristiques, calculer des grandeurs...
Armelle Géninet dont les livres et les stages de formation ont largement clarifié mes intuitions explique que les élèves doivent partir à la découverte de la "*mathémacie*", nouveau pays avec ses êtres abstraits et son langage spécifique.

Les élèves devront donc être capables de se dégager de la réalité concrète et d'évoquer les objets mathématiques dans leur abstraction pure définie comme des liens entre des éléments donc en paramètre 3. Par exemple, un losange est un quadrilatère qui a quatre côtés égaux ou bien un quadrilatère qui a des diagonales qui se coupent en leur milieu et perpendiculairement ou un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux.

Les objets mathématiques sont porteurs de notions d'espace et de temps par leur nature intrinsèque et Armelle Géninet a fourni un gros travail d'explicitation de ces notions.
Les calculs 4 + 3, 4 - 3 ou 4 x 3 recèlent des structures spatio-temporelles distinctes : spatiales pour les deux premières alors que 4x3 doit se comprendre dans la temporalité de la répétition de 4 quantités. Du point de vue des liens d'attribution, dans 4+3, il y a union de l'espace 4 et de l'espace 3 alors que dans 4-3, il ya exclusion de l'espace 3 qui était inclus dans l'espace 4. De même, au collège, une fraction qui était en primaire la description d'un processus devient un nombre à part entière (un espace).
L'écriture de certains objets présentent une temporalité inversée par rapport à la transformation qu'elle sous-entend. Par exemple pour calculer "trois quarts" de quelque chose, il faut d'abord diviser par quatre puis multiplier par trois. De même la temporalité de l'écriture de "quatre centimètres carré" favorise l'attribution du 4 au mot centimètre alors que l'entité "centimètre carré" doit être considérée comme un tout (un espace en quelque sorte).

Le langage mathématique a ses propres symboles dont la signification de certains devient polysémique au collège.
Par exemple, en cinquième, le signe d'opération "moins" devient aussi le symbole de position d'un nombre relatif et, en quatrième, il indique encore le passage à l'inverse dans l'exposant d'une puissance. Le signe = devient une égalité conditionnelle et non plus celui d'une égalité absolue dans la résolution d'équations. Le symbole "x" devient une inconnue et non plus seulement un nombre variable et il faudra dans les formules algébriques évoquer les lettres comme des contenants...

[7] Antoine de La Garanderie , Comprendre et Imaginer, p 98

De même, le mot hauteur est à évoquer dans sa définition mathématique et non concrète (verticalité) et il désigne des réalités différentes selon les cas (ensemble de points ou longueur)... L'élève devra donc avoir évoqué et mémorisé les différents statuts de ces objets et être capable de choisir le bon en fonction du contexte.

Par ailleurs, Armelle Géninet a explicité la nature spatio-temporelle d'un problème concret à résoudre. Il est composé d'un état initial (un nombre donc un espace) qui est transformé par un opérateur (donc du temps) en un état final (un nombre donc un espace) et cet état final peut devenir à son tour un état initial...Il s'agit pour l'élève de construire cet enchaînement afin de déterminer l'élément manquant recherché, qui pourra être l'état initial, final ou bien la transformation. La transformation étant une opération, il est bon de présenter ensemble les opérations complémentaires afin que l'élève sache remonter d'un état final à un état initial.

Les spécificités épistémologiques liées à la nature des objets mathématiques vont colorer d'une façon particulière les gestes mentaux pratiqués par le mathématicien. La présentation très spatiale et globale des objets mathématiques tant en géométrie qu'en numérique obligera l'élève à mettre par lui-même du temps dans ses évocations pour mener à bien la résolution d'un exercice.

c) La spécificité de la démarche mathématique au regard de la gestion mentale :

1. l'évocation :
Du fait de la nature rédactionnelle d'une démonstration mathématique en géométrie qui s'appuie pourtant sur la représentation très spatiale d'une figure, Armelle Géninet préconise d'entrainer les élèves à pratiquer <u>des évocations mixtes</u> (visuelles et auditives) et couvrant si possible tous les paramètres et <u>plus particulièrement le paramètre 3</u> de façon à permettre la mobilité mentale de l'élève dans l'abstraction de l'objet mathématique.[8]

Il faudra donc entrainer les élèves à prolonger leurs évocations naturelles (en verbalisant les figures pour les visuels et en évoquant des figures dessinées dans le prolongement de leur discours pour les auditifs) .

Ainsi, les auditifs qui ont une évocation dans la successivité ("de type tricot", Armelle Géninet) mettront naturellement du temps en se racontant avec des mots les structures mathématiques spatiales qu'ils percevront. Lors de la mémorisation d'une propriété en géométrie, ils devront être entrainés à reconstruire, à partir de ce discours, une image visuelle ou une impression d'image en évocation afin d'identifier plus efficacement les conditions d'application de cette propriété dans une figure complexe.
Antoine de La Garanderie écrit : "*La grande difficulté des élèves auditifs...provient du fait qu'il leur faudrait avoir commenté, donc verbalement, dans leurs détails, les structures visuelles qui leur sont données, pour les rattacher à celles qu'ils n'ont pu acquérir qu'en les traduisant en langage verbal."* [9]. D'autant plus que "*quand il y a consonance entre les images évoquées et les objets perçus, le sujet en situation d'évocation sent que les images qu'il évoque ouvrent sur la possibilité réelle d'en retrouver d'autres, qui n'ont pas été mobilisées au moment où l'on percevait, visuellement ou auditivement, l'objet."*[10]

[8] Armelle Géninet, La gestion mentale en mathématiques p 43
[9] Antoine de La Garanderie , Comprendre et Imaginer, p 75
[10] Antoine de La Garanderie , Profils pédagogiques, p 78

Les visuels qui ont une évocation dans l'espace et dans la simultanéité ("de type patchwork", Armelle Géninet) et qui sont centrés sur l'état final mettront du temps dans leur espace mental en traduisant en mots les codages de la figure afin de constituer le déroulement de la démonstration et retrouver la formulation des lois à utiliser.

Le paramètre trois dans toutes ses dimensions d'analogie, d'attribution et de sériation spatio-temporelle doit être évoqué par l'apprenant. Armelle Géninet décrit que l'auditif fonctionnera plus par analogie et le visuel davantage par inclusion-exclusion.

Dans un processus, l'auditif s'intéressera davantage à l'état initial et à la transformation mais pourra perdre de vue l'état final et donc se perdre en chemin alors que le visuel pourra se précipiter dans la mauvaise transformation d'un état initial mal identifié pour atteindre au plus vite l'état final.
Armelle Géninet explique que la gestion du paramètre trois ne s'acquiert pas par autrui, il est à agir mentalement donc en évocation et il est de la responsabilité de l'enseignant de le faire vivre. (stage Maths 2).
Le schéma, centré ou non, comporte les deux dimensions de l'espace et du temps et permet de présenter une réalité sous différents points de vue. Il peut être utilisé dans les différentes phases de l'apprentissage.
(voir exemple en mathématiques en annexe 1)

2. Le geste d'attention :
Armelle Géninet parle de "*l'œil du mathématicien*" qui doit se méfier de ce qu'il voit (-x n'est pas toujours un nombre négatif) et deviner ce qu'il ne voit pas (trois points distincts non alignés forment un triangle, même s'il n'est pas tracé), tout en n'omettant aucun petit indice ! [11]
Par ailleurs, au-delà des indices préférentiels que l'élève va naturellement trier selon son profil pédagogique, l'élève devra opérer du tri spatial ou temporel dans ses prises d'indices pour respecter les lois mathématiques.
Dans un calcul, l'élève devra d'abord repérer la nature des opérations afin de pouvoir décider de celles qu'il exécutera en premier selon la règle de priorité des opérations. Dans une démonstration à partir d'une figure codée, l'élève devra savoir isoler un ou des indices à l'exclusion des autres pour utiliser une loi ayant ces indices comme conditions d'application.
Dans un travail de factorisation, l'élève devra identifier et créer des espaces cachés.... par exemple, le facteur commun x^2 caché dans chacun des termes de la somme algébrique du type : $5x^2 - 6x^4 + 7x^5$.

3. Le geste de compréhension :
Antoine de La Garanderie écrit : *" L'intuition du sens se produit au moment même où dans l'évocation et par l'évocation visuelle ou auditive, le sujet ré-exprime mentalement des données perçues dans la perspective déterminée : comprendre, c'est pouvoir appliquer ; comprendre, c'est pouvoir expliquer."*[12]
Il s'agit pour l'enseignant de mathématiques de faire prendre conscience à l'élève de son habitude mentale et de lui proposer de l'ouvrir à son complément. Armelle Géninet précise que *"En mathématiques, même si l'explication n'est pas formulée, elle sous-tend la stratégie applicative et peut être exprimée à tout moment."* [13]

[11] Armelle Géninet, La gestion mentale en mathématiques p 163
[12] Antoine de La Garanderie , Comprendre et Imaginer, p 52 à 57
[13] Armelle Géninet, La gestion mentale en mathématiques p 77

Pour élargir le projet de compréhension d'une loi, Armelle Géninet propose sa présentation sous une forme triangulaire avec 3 étapes dont celle de l'explication afin de rompre avec le schéma linéaire de l'application. Elle insiste sur le fait que l'élève sache pratiquer des allers et retours d'une étape à l'autre pour ne pas figer sa compréhension : par exemple, factoriser et développer sont à comprendre l'un en équivalence avec l'autre.[14]

4.Le geste de mémorisation :
En mathématiques, le geste de réflexion étant particulièrement sollicité, il est indispensable que les acquis soient solidement mémorisés.

Sans acquis stockés de façon précise et complète (en paramètre 1 ou 2) en lien avec des acquis passés (en paramètre 3) et avec un imaginaire d'avenir constitué lors de l'apprentissage (critères d'application, pour prouver quoi...), l'élève sera très vite démuni en résolution d'exercices. Or beaucoup d'élèves se suffisent de leur compréhension et se trouvent donc rapidement limités.

5. Le geste de réflexion :
Antoine de La Garanderie écrit : *" Dans le geste mental de la réflexion, on doit ré-fléchir à partir de l'objet perçu une loi et une règle sur cet objet perçu lui-même. Le "re" dans ce cas fait faire un retour sur une loi et une règle non données et la flexion applique cette loi ou cette règle à l'objet donné en perception."* [15]

Ce geste est d'une grande complexité car il nécessite d'évoquer de façon complète et stable l'objet de perception et d'aller choisir dans ses acquis, présents en évocation, la loi qui convient et enfin de savoir l'appliquer.
Or, en mathématiques, tout calcul est unique mais heureusement les processus opératoires ont un déroulement séquentiel dans le temps qui guide le choix de la loi...par contre, en géométrie, il faut avoir à disposition l'ensemble des propriétés pour réussir à choisir la bonne afin de construire un processus déductif de démonstration !

6.Le geste d'imagination :
Le geste d'imagination créatrice est décrit dans le vocabulaire de la Gestion Mentale comme "*le dynamiseur de l'activité mentale"* par sa mise en œuvre dans les quatre autres gestes mentaux. [16].
C'est flagrant en mathématiques, il doit être "entrainé" par l'enseignant.

III. Les incontournables de mon métier :

a) Mon métier de professeur de Mathématiques tel que je l'envisage dans ses finalités :

- Faire entrer les élèves dans ce monde théorique de « *la mathématie* » (d' Armelle Géninet) avec ses règles et ses lois logiques . Ceci, tout en m'efforçant d'offrir un vécu de sens concret afin d'accompagner l'apprenant à « tacter » lui-même le sens de l'objet de connaissance pour asseoir ses évocations plus symboliques sur des évoqués concrets qui amènent le sens.

---

[14] Armelle Géninet, La gestion mentale en mathématiques p 79 et les 24 propositions p 111

[15] Antoine de La Garanderie , Pédagogie des moyens d'apprendre, p 179

[16] J.P Gaté, A.Géninet, M.Giroul, T.Payen de La Garanderie, Vocabulaire de la gestion mentale, p 41 et 42

- Mettre l'apprenant en situation de tâche et lui faire vivre, en conscience, par l'introspection, son acte de connaissance afin de lui permettre de découvrir ses propres lieux de sens (*espace, temps et/ou mouvement* : vocabulaire de la gestion mentale p 48) car « *L'apprenant a un rapport singulier au sens. Tout l'art de la pédagogie du sens consiste à rendre possible la rencontre entre les vécus de sens de l'apprenant et le sens institué du savoir ».* [17]. Pour ce faire, il me faudrait mener davantage de dialogues pédagogiques en classe afin que l'élève puisse être renseigné sur ses propres ressources pédagogiques et « *être pédagogue à l'égard de lui-même* ».[18]

- Leur donner accès à leur pouvoir mental en leur permettant de conscientiser les stratégies efficaces qu'ils mettent en œuvre: coloration de leurs évocations selon la palette évocative, constitution d'un stock de règles, de lois et de protocoles, qualité de l'observation de ce qui est donné tant en calcul qu'en géométrie et évocation de ces observations, confrontation de ce qui est donné avec le stock ….

  Sur des exemples concrets, je propose aux élèves de "décoder" leurs propres actes de connaissance afin de dégager les incontournables des gestes mentaux et de transférer leurs pratiques à d'autres disciplines.

- Leur permettre de faire des liens entre les différentes notions étudiées afin de créer du sens **:** calculs et mise en équation en géométrie par exemple…

- Autoriser le questionnement, le pourquoi, le à quoi ça va me servir !

- Projeter ces notions dans un imaginaire d'avenir, d'utilisation ou de complément par les programmes à venir, dans des exercices transversaux ou d'application concrète.

- Leur donner les moyens de pratiquer pour eux-mêmes un questionnement utile permettant de servir une réflexion autonome et efficace qui pilote la résolution d'exercices que ce soit en géométrie ou en algèbre. Il s'agit d'entrainer le geste de réflexion des élèves et aussi de les conduire à définir des schèmes opératoires, matérialisés sous la forme de schémas de synthèse.[19]

- Accueillir les idées et les solutions personnelles des élèves et les éclairer à la lumière de la théorie qui pourra toujours les valider ou non. Antoine de La Garanderie écrit à propos de l'imagination créatrice : *"Mais ce qui demeure en notre compétence, c'est le fait pédagogique que l'enseignant doit inviter l'élève à écouter et à regarder, avec non seulement l'exigence de fidélité à ce qui lui est présenté, mais aussi à ce que lui-même ressent, estime...Il suffira parfois, voire souvent, d'ouvrir l'élève à sa capacité de s'investir personnellement dans ce qu'on lui donne à apprendre et à comprendre pour qu'il y parvienne et s'avise de la dimension d'imagination qu'il possédait à son insu."* [20]

- Faire vivre aux élèves la joie de comprendre, de savoir, d'utiliser, de réussir mais aussi de chercher avec persévérance et imagination !

---

[17] J.P Gaté, A.Géninet, M.Giroul, T.Payen de La Garanderie, Vocabulaire de la gestion mentale, p 71
[18] Antoine de La Garanderie, Plaisir de connaitre et bonheur d'être
[19] Antoine de La Garanderie , Pédagogie des moyens d'apprendre, p 69
[20] Antoine de La Garanderie , Comprendre et Imaginer, p 98

Ces paroles d'Antoine de La Garanderie résument mieux que tout "la dynamique" qui m'anime dans mon métier :

« … *assurer à l'élève, à l'apprenant, éveil de désir, expression de plaisir et constitution de bonheur. … pratiquer une pédagogie qui se donne pour but l'apprentissage des actes de connaissance et non l'acquisition simple du savoir. … Apprendre des plaisirs d'actes et non pas des satisfactions d'état.»*[21]

b) Les moyens que je me donne :

1. En continu :

Poser le cadre de la spécificité de la démarche mathématique est très important pour moi par honnêteté intellectuelle et dans un souci de globalité et d'explication du contexte. Je suis sûrement guidée dans cette direction par un projet de sens expliquant.

Mon objectif est de donner aux élèves des repères clairs sur ce qui est attendu et sur ce qui fonde l'exactitude d'un résultat en mathématiques donc, aussi, sur la façon dont ils vont être évalués.

Cette discipline étant particulièrement sélective dans les études supérieures, l'enjeu est important !

Je fais très souvent référence à l'histoire des mathématiques et à la démarche rigoureuse d'Euclide qui récuse la méthode du simple constat de ses prédécesseurs (Thalès et Pythagore) et qui, à partir d'un nombre réduit de définitions et de postulats, applique une méthode strictement déductive pour obtenir de nouvelles propositions. J'énonce quelques définitions d'Euclide, comme « la ligne est ce qui a une longueur mais pas d'épaisseur » pour expliciter le caractère abstrait et conceptuel de la théorie mathématique, malgré ses nombreuses applications pratiques.

Antoine de La Garanderie écrit : « *se remettre dans le climat de familiarité de la pensée d'Euclide qui se pose des questions , à partir des figures dont il cherche la rationalité. Vivre dans son ambiance de recherche, se reposer des questions, retrouver son aventure intellectuelle, n'est-ce pas sauvegarder la transcendance du Dasein qui veut s'investir la pensée géométrique, fruit des cogitations d'Euclide ? On n'accédera pas à la transcendance de la géométrie mais on se familiarisera avec le génie d'Euclide…*».[22]

J'explique à mes élèves qu'ils seront les disciples d'Euclide et qu'à travers cette discipline, ils vont former leur esprit au raisonnement déductif par lequel on transforme des données considérées comme justes en de nouveaux résultats en enchaînant de façon logique et rigoureuse, règles, propriétés et définitions démontrées.

Cette référence à l'inventeur de la géométrie va rassurer les expliquants sur la solidité du savoir à acquérir et motiver les appliquants à se placer dans la lignée des utilisateurs.

De plus, ce type de raisonnement n'est pas spécifique aux mathématiques et pourra être réinvesti dans tout travail d'argumentation dans quelque discipline que ce soit.

Je m'efforce donc d'être très rigoureuse sur le sujet de la preuve tant en numérique qu'en géométrie. Une démonstration écrite dans le cours d'un élève a toujours un statut déclaré : "démontré par mes soins" ou "admise". En numérique, la règle utilisée pour passer d'une ligne à l'autre d'un calcul, est stipulée en rouge dans le cours ou au moins énoncée à l'oral. Dans la résolution d'un calcul, je m'autorise donc à demander à brûle pourpoint à mes élèves pourquoi ils sont certains que ce qu'ils font est juste, quelle règle (souvent implicite) ils mettent en jeu....

Cette explicitation volontaire de la structure déductive de la théorie mathématique est en fait pour moi un modèle à copier. Elle fait partie du contrat pédagogique conclu avec mes élèves.

---

[21] Antoine de La Garanderie , Plaisir de connaitre et bonheur d'être

[22] Antoine de La Garanderie, Critique de la raison pédagogique, p 105

Ceci me permet en échange d'inscrire des exigences auxquelles, en contrepartie, je n'accepte pas qu'on déroge....Mes élèves connaissent "mes" grands principes, qu'ils doivent faire leur car ils sont inhérents aux mathématiques.

En géométrie, j'ai quelques techniques de rédaction que j'essaie de rendre incontournables dès le début de l'année scolaire.

Dans le cours :

Toute propriété est écrite en français telle qu'elle devra être récitée en démonstration et elle est aussi présentée sous la forme de deux figures qui se succèdent. Celle du "si "sur laquelle les conditions d'application sont codées en rouge et celle du "alors" sur laquelle la conclusion est codée en rouge et les conditions d'application en noir.
En effet, la nature spatiale de la présentation et de l'écriture des propriétés est un obstacle à la compréhension des élèves. Pour la démonstration, les évocations temporelles du « si .. alors » sont incontournables. La figure du "si" devra être évoquée et mémorisée afin de pouvoir l'identifier et l'isoler dans le dessin plus complexe d'un exercice.

Une propriété ou une définition ne sont pas inventées par l'élève, elles doivent être formulées de façon complète, exacte avec un vocabulaire bien choisi...et si elle n'est pas citée de façon juste et cohérente, l'élève est conscient de perdre au moins 1,5 points dans un contrôle ! Pour ce faire, j'entraine les élèves à décider d'enrichir leurs évocations en mettant du mouvement, des clignotants, des mots...afin d'identifier le mot clé qu'il est préférable de citer en premier pour dérouler le récit de la propriété, à partir de la figure du "si".

Dans le cadre de la résolution d'un exercice :

Du fait de l'imprécision de l'œil humain, on ne peut se fier ni à la direction des droites, ni mesurer une grandeur sur une figure. On ne peut être certain que de ce qui est déclaré vrai dans l'énoncé ou bien de ce qu'on a prouvé.
Il s'agit de dérouler les étapes suivantes :

- Faire une figure ressemblante (un rectangle ne se dessine pas comme un losange) , le plus souvent à main levée.
- Coder cette figure avec les définitions des données de l'énoncé : perpendiculaires, milieu, médiatrice…
- Pour coder des parallèles, les repasser de la même couleur.
- Pour indiquer les segments dont la longueur est donnée, les repasser au surligneur fluo.
- En début d'année, j'exige que les données soient explicitement écrites en langage mathématique à côté de la figure sous la rubrique « données ».
- Quand un résultat a été prouvé, il est codé sur la figure et rajouté dans la rubrique « données ».

  Une démonstration se rédige en trois étapes : 1. Je sais que 2. D'après la propriété…3. Donc .

  Le « Je sais que » doit être tiré de la rubrique « données », sinon il faut au préalable le démontrer.

Afin de faciliter les révisions des classes antérieures, je distribue à mes élèves de quatrième une synthèse de toutes les propriétés du collège y compris celles de troisième. Ces propriétés sont classées par le type de conclusion qu'elles fournissent. Chacune est écrite en français avec la figure du "si" dessinée et codée à côté.

Mon souci constant d'expliciter les procédures à mettre en œuvre tient au fait que ces dernières sont finalement assez répétitives et que mon objectif fondamental est de permettre à l'élève d'être autonome et de pouvoir auto-évaluer sa production.

Je souhaite que chaque élève puisse jubiler dans l'expression de sa liberté de faire, de se tromper et de se corriger dans une dynamique bienveillante de progrès.

Dans le strict domaine des mathématiques, il s'agit pour moi d'apporter aux élèves une certaine «sécurité méthodologique», notion utilisée par Antoine de La Garanderie à propos de l'enseignement des gestes mentaux, idéal que j'aimerais atteindre ![23]

Mon projet est de mettre en œuvre ce beau programme décrit par Antoine de La Garanderie dans une pédagogie de l'entraide :
«… soutenir les élèves dans leurs efforts, les éveiller à leurs moyens, les suivre dans leurs démarches et leurs initiatives. L'acte pédagogique n'a de sens, de durée et d'idéal que s'il se donne les méthodes voulues pour que cette mission soit remplie » et « la pédagogie est l'art d'assumer le temps qui se découvre dans la vie des consciences ».[24]

Plus concrètement, au-delà de ces grands principes qui habitent ma pratique, je me suis efforcée de dresser la liste de ce qui me parait aujourd'hui des incontournables en terme de pédagogie au quotidien.

2. En début d'année :

- Me présenter en tant que professeur de mathématiques qui souhaite accompagner ses élèves tant dans leurs savoirs que dans la gestion de leurs ressources pour réussir.
  J'accueille les élèves dans ma salle en leur dévoilant la phrase d'Antoine de La Garanderie :
  « *Nous avons tous besoin de ton génie. Tu as quelque chose à montrer ; tu as une intelligence du monde, une sensibilité de la vie, que tu es le seul à posséder. Il te faut parvenir à la communiquer. Nous ne tolèrerons aucune démission, car nous voulons que rien ne soit perdu de ce qui est et mérite d'être.* » [25]

  Je leur présente l'œuvre d'Antoine de La Garanderie et comment je vais leur proposer de partir à la découverte de leurs propres moyens cognitifs. Puis je me présente en m'efforçant de répondre aux questions que je vais leur poser pour remplir leur fiche personnelle de renseignements. Il s'agit pour moi, dès la première heure, d'amorcer une pédagogie de la relation, si bien décrite par d'Antoine de La Garanderie dans « Une pédagogie de l'entraide».

- Présenter le programme en le replaçant dans les acquis du passé et en le projetant dans un avenir de réutilisation, proche ou plus lointain. Je construis avec les élèves une carte heuristique de leurs acquis et la complète avec le programme de l'année en respectant la chronologie que j'ai choisie. Je demande aux élèves et à leurs parents de signer un contrat qui est collé sur la première page du cahier de cours. *(*annexe 2 *)*
  Antoine de La Garanderie décrit l'intérêt d'initier les élèves à l'intelligence du programme :
  « Puisque la pédagogie de la réflexion, de la mémoire et de l'attention implique le projet, puisque ce projet ne peut se définir qu'à travers la relation des consciences qui en décident, l'intelligence du programme sera le point de départ obligé pour l'enseignement de toute discipline».[26]
  Ce lancement dans le projet de l'année sert autant les élèves qui ont besoin d'avoir la globalité du programme que ceux qui s'inscrivent dans la temporalité.

---

[23] Antoine de La Garanderie , Pédagogie des moyens d'apprendre, p 25 et 78
[24] Antoine de La Garanderie , Une pédagogie de l'entraide, p 48
[25] Antoine de La Garanderie , Comprendre et Imaginer
[26] Antoine de La Garanderie , Une pédagogie de l'entraide, p 86

- Questionner les élèves sur « A quoi cela sert les Maths ? » et dans quelles disciplines ils vont être amenés à utiliser les mathématiques. Mon objectif est de mettre les élèves en projet de réutilisation pour favoriser le geste de mémorisation.

  En début de quatrième, il est parfois difficile pour les élèves de l'envisager or dans l'année, les puissances de 10 et la fonction linéaire seront utiles au professeur de Physique.

- Introduire les élèves à la recherche de la nature de leurs évocations en leur faisant vivre leur capacité à l'introspection à partir d'exercices non scolaires. Il s'agit tout simplement de permettre aux élèves de découvrir leurs ressources mentales et leur lieu de sens. Le fait de le vivre en groupe permet de faire constater aux élèves la diversité des possibles et d'envisager d'enrichir leurs propres évocations.
  Cette première découverte est un moment intense qui comble les élèves et qui, me semble-t-il , enrichit la relation de l'élève avec son professeur qui, lors du dialogue pédagogique, n'est plus celui qui sait !
  L'élève, placé au centre de l'échange, est mis en valeur par son unicité ; il expérimente empathie et congruence de la part de son enseignant. Plus tard, en cours, il acceptera d'être interrogé sur ses évocations et osera plus facilement venir demander de l'aide.

- Leur faire vivre la notion de projet ainsi que l'expérimentation des gestes de connaissance sur des exercices non scolaires dont la non réussite en présence de l'enseignant n'a aucun enjeu. Ceci afin de favoriser la libre expression de l'élève, de l'autoriser à regarder ses difficultés sans peur et à choisir et expérimenter les moyens qui pourraient le faire progresser. L'élève se sentira plus confiant pour transférer ensuite ses découvertes dans les domaines scolaires et pourra y être encouragé par son enseignant.

3. En début de chapitre, introduire la notion :

- En faisant émerger les représentations existantes des élèves sur la notion. Je le pratique très souvent sous la forme d'une carte heuristique. En quatrième, cela peut prendre la forme de petits tests ou de révisions systématiques avec projections de figures en géométrie. Sur une notion, une « représentation » est toujours là, celle-ci peut faire obstacle à la compréhension.

- En replaçant cette notion dans l'historique des notions déjà acquises et éventuellement dans le complément qui sera abordé les années suivantes. (recherche de globalité et imaginaire d'avenir).

- En présentant l'objectif à atteindre (pour les élèves qui sont dans la finalité) :
  - quand c'est du calcul, j'écris une opération qui sera résolue en fin de chapitre.
  - quand c'est de la géométrie, je présente l'environnement d'application des théorèmes et parfois leur résultat. (pour les appliquants)

- En racontant l'histoire de l'inventeur, l'étymologie du mot et si possible en citant des exemples d'applications dans l'histoire des hommes qui seront explicitées à la fin du chapitre. Par exemple, la corde à treize nœuds des bâtisseurs Egyptiens est une mine pour illustrer l'utilisation pratique de Pythagore et de Thalès.
  (pour les expliquants et les appliquants)

4. A chaque cours :

- Demander aux élèves de réactiver le contenu du cours précédent et interroger des élèves sur la nature de leurs évocations et sur leurs connaissances.
  Il est difficile pour moi de mener des dialogues pédagogiques en classe sur la nature des évocations des élèves. En tant qu'enseignante, je recherche parfois trop le contenu ! Or les outils mentaux d'un élève peuvent devenir des ressources pour un autre !

- Lors de la réactivation d'une propriété de géométrie, demander aux élèves de faire exister la figure du «si » de la propriété dans leur tête et de coder en couleur les conditions d'application…..puis de faire déformer la figure, plus grande, plus petite….la tourner dans tous les sens …surtout pour les sixièmes ! Une fois que la figure est bien stable, demander aux élèves, en regardant la figure qu'ils ont dans la tête, de raconter la propriété…ou inversement pour ceux pour qui c'est plus facile de se raconter la propriété par cœur, de faire apparaitre une figure codée correspondant au « si » de la propriété. Si il est trop difficile pour les visuels de raconter sans écrire ou pour les verbaux de dessiner dans le vide, les élèves sont autorisés à prendre une feuille de papier et je passe dans les rangs.

- Annoncer le déroulement du cours pour les élèves qui ont besoin de globalité et pour ceux qui doivent s'inscrire dans un déroulement.

- Pour toute notion nouvelle résultant d'une définition qui n'est pas à comprendre, ne rien expliquer mais pratiquer la double présentation qui consiste à alterner strictement les perceptions auditives et visuelles en donnant à l'élève le projet de réentendre ce qui a été dit en évocation sur ce qu'il est donné de voir et de revoir, en évocation, sur ce qu'il est donné d'entendre....Ceci afin de s'assurer que l'élève pourra constituer l'évoqué qui lui convient puis l'enrichir afin de faire émerger le sens. Elle répond à l'exigence "*d'approfondissement et de maintien de l'évocation en vue d'établir des liens de comparaison et de vérification dans le trajet perception/évocation.*"[27]
  J'ai pu l'expérimenter avec beaucoup de succès sur la définition d'une puissance à exposant négatif, qui est particulièrement difficile à acquérir par les élèves.

- En géométrie, j'utilise un logiciel de géométrie dynamique pour faire découvrir la conclusion d'une propriété ou la généralité des caractéristiques d'une figure géométrique donnée.
  Cet outil permet aux élèves de constituer des évoqués dynamiques, porteurs de liens en paramètre trois, qui si ils sont mémorisés, pourront nourrir tous les gestes de connaissance.
  Avant de mettre une figure en mouvement avec le logiciel, je demande aux élèves de se préparer à se re-dire ou à revoir dans leur tête ce qui va se passer puis je marque un temps de pause hors perception. Ensuite, toujours hors perception, je leur demande de se le re-dire pour eux avant de proposer aux volontaires de formuler leurs observations sous la forme d'une propriété mathématique qui sera enrichie puis validée par la classe. (article en annexe 3)

- Pratiquer des pauses évocatives hors perception et prendre le temps de pratiquer des dialogues pédagogiques sur les évocations des élèves.

[27] J.P Gaté, A.Géninet, M.Giroul, T.Payen de La Garanderie, Vocabulaire de la gestion mentale, p 19

5. En fin de chapitre : faire faire aux élèves la synthèse de ce qui a été découvert.

- Sous la forme d'une carte heuristique comprenant les étapes de la démarche, illustrées par un exemple et enrichies de couleurs et de pictogrammes ou à partir de schémas spatialisés. (exemple en annexe 2).

- En replaçant les propriétés dans le cadre plus général de la conclusion qu'elles apportent ou inversement en explicitant les conditions d'application de théorèmes qui portent le nom de leur inventeur.(du particulier au global).

- En suscitant des synthèses orales et de mémoire de toutes les propriétés déjà étudiées permettant de démontrer un résultat donné. (du global au particulier)

6. A la veille d'un contrôle : Imaginer le contenu du contrôle et ses différentes formes possibles.

7. En correction d'exercices :

- En correction d'exercices de géométrie, toute solution différente de celle qui a été validée, est écoutée et discutée par la classe et en dernier ressort par le prof. Je mets particulièrement en valeur les démarches originales pour faire valoir cette part de liberté de l'élève ! (première personne)

- Concernant la gestion de l'erreur : sur les copies, j'entoure l'erreur et demande à l'élève de me la décrire en français, selon une typologie que nous avons recensée en classe, et bien sûr de la corriger.

  Lors d'une correction d'exercices au tableau : la faire expliciter par l'élève, le laisser l'exprimer avec ses propres mots , lui demander ce qu'il aurait pu faire pour l'éviter, ….
  Lui demander d'évoquer son erreur, de la corriger dans son évocation ….et l'inciter à réactiver cette évocation.

IV. Récits de mises en pratique :

a) La découverte du théorème de Thalès en quatrième :

1. Première partie : évoquer et mémoriser la configuration de Thalès :
Comme à chaque cours, je présente le déroulé du cours du jour.

Je présente M. Thalès qui a découvert une propriété mathématique qui porte son nom…ce qui nous arrange bien car de ce fait les élèves n'auront jamais à la raconter in extenso mais seulement à l'appliquer en citant juste son nom ! Je décris le contexte historique avec l'anecdote que M. Thalès a été le premier à avoir su calculer la hauteur de la pyramide de Khéops, ce qui a ravi le pharaon de l'époque…et nous verrons quelle astuce il a utilisée…Il n'a pas démontré son théorème, c'est encore M .Euclide, qui trois siècles plus tard, a fondé la théorie de la géométrie dite euclidienne, tant utilisée de nos jours, et qui a prouvé l'exactitude mathématique des observations futées de M.Thalès….souvenez vous que pour M. Pythagore, c'était la même histoire…

M. Pythagore a travaillé dans des triangles….M. Thalès, lui, a travaillé avec deux droites sécantes coupées par deux parallèles….Je demande alors aux élèves d'imaginer dans leur tête quel dessin cela peut bien donner.

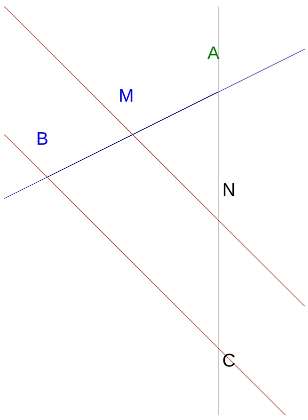
Après un temps de silence, je leur demande si ils ont pu le tracer dans leur tête et s' ils ont l'impression qu'ils pourraient en tracer plusieurs qui soient différents mais qui correspondent bien à la description demandée. Silence….puis vérification, en évocation, que le ou les dessins évoqués correspondent bien aux consignes que je répète….En conclusion, je les félicite en leur disant qu'ils auraient donc pu être les élèves de l'école de mathématiques de M. Thalès….

Puis, je leur demande de bien vouloir tracer les figures évoquées en vrai sur leur cahier de brouillon pendant que je passe dans les rangs. Pendant que je passe voir chacun, ils ont l'habitude de confronter leur production avec leur voisin.

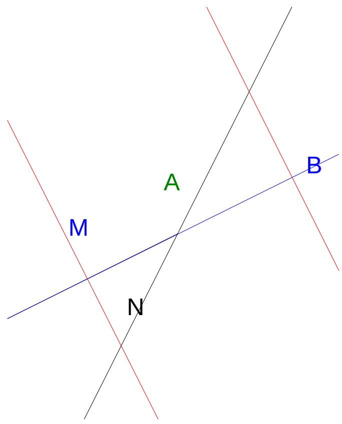
Les élèves tracent à main levée sur leur cahier ce type de configuration, les parallèles sont de la même couleur, habitude prise depuis le début de l'année.. Je les incite à en proposer plusieurs en se redisant pour eux la consigne….

En passant dans les rangs, je finis toujours par trouver les deux types de dessins qui correspondent à la description donnée. Je les dessine au tableau en citant le nom de ou des élève(s) qui ont pensé à la configuration de type 2 ou bien je la fais découvrir au tableau….je donne des noms à certains points sur la figure.

Type 1



Type 2



Je leur explique que nous avons donc posé le décor de travail de M. Thalès et j'essaie de leur faire deviner à quel animal pourrait ressembler la configuration 2 ….à un papillon ….ce sera donc son nom pour la différencier de la première mais elle ne sera étudiée qu'en troisième !

En quatrième, nous n'étudierons que la configuration 1 et je leur propose d'y voir un objet concret en imaginant un bonnet de ski avec un gros pompon et une seule rayure , parallèle au bord du bonnet ….Ils devinent très facilement quel point est le pompon, quel segment est la rayure…..Nous associons en évocation la configuration mathématique concrète de Thalès dessinée au tableau avec l'objet « bonnet de ski », en énonçant le nom du point qui est le pompon, du segment qui est la rayure …

Nous nous projetons alors dans les futurs exercices à résoudre….il faudra trouver des bonnets de ski avec des pompons dans nos figures géométriques pour M. Thalès….

Je leur demande alors de prendre leur cahier de cours pour marquer ce qui a été dessiné au tableau. Les élèves doivent reproduire le dessin du tableau et quand c'est fait, je leur propose de marquer avec une flèche : pompon, rayure….
J'essaie d'observer le silence pendant le temps où ils recopient dans leur cahier de cours.

Observations pédagogiques :

J’ai passé 20 minutes à poser le cadre dans lequel va « se jouer Thalès » . Mon objectif a été de :

- Répondre au « Quand », « Qui » pour les « expliquants » qui ont besoin de savoir d’où vient ce mot « Thalès ».
  J’ai aussi répondu au « Comment » on devra le citer en contrôle, question qui est souvent posée dès le premier cours d’un nouveau chapitre par les élèves « appliquants ». Par contre, volontairement, je ne réponds pas au « pour quoi » des élèves à ce moment là car je souhaite le leur faire découvrir plus tard. Quand un élève me le demande trop tôt, je lui réponds que je comprends sa préoccupation et je le charge de le détecter en premier dans les activités qui vont venir…

- Réinvestir la compréhension du vocabulaire des droites par la production d’une figure en évocation sur une consigne entendue. Pour ceux pour qui ce serait trop difficile de le faire en évocation, ils prennent d’eux même un crayon avant que je ne demande le tracé.
- Permettre à chaque élève d’explorer tous les possibles par lui-même en déployant son geste d’imagination créatrice avec un retour à la consigne, ceci en évocation. Offrir à ceux qui le peuvent de donner de la mobilité à leurs évocations visuelles.
- Installer la globalité des configurations de Thalès dès le départ, pour que l’élève ne fragmente pas son savoir, même si l’une d’elles ne sera étudiée qu’en troisième, plus particulièrement pour ceux qui sont mus par un projet de sens de fin. Les élèves sont ainsi sensibilisé à un futur de réutilisation lointain qui va stimuler leur geste de mémorisation.
- Autoriser l’élève à valider sa production tracée, par lui-même puis par son pair avant qu’elle ne soit validée par le prof. Ceci afin que l’élève apprenne à s’entrainer à évoquer une consigne et à pratiquer les allers et retours pour vérifier qu’il a bien **tout** évoqué pour réaliser correctement la tâche.
- Se placer déjà en imaginaire de situation d’application en explicitant d’emblée qu’il suffira de citer le nom de ce théorème et par l’installation en évocation de la configuration qu’il faudra extraire d’une figure plus complexe en exercice.
- Par la comparaison avec le bonnet de ski, évoquer du P4 sur du P1 alors que en mathématiques, lors de l'application du théorème de Thalès , nous ferons du P3 sur du P2.

Les cahiers sont ensuite fermés afin de se concentrer sur ce que je vais projeter à l’écran.

2. Deuxième partie : découvrir la conclusion du théorème de Thalès

Je projette une figure géométrique et je leur demande s’ils peuvent y reconnaitre une configuration de Thalès et qui serait le pompon….J’ai donc ici inversé la nature de la perception, elle est visuelle et les élèves doivent la confronter avec leur évocation précédente.

J’affiche une fenêtre de calculs et je leur fais expliciter la nature des calculs effectués et les résultats obtenus. Je reformule juste leurs observations.

Je leur annonce que je vais successivement bouger la position relative de certains points et je leur demande d’observer ce qui se passe. Je déplace successivement les points A, B et M. Les élèves voient 3 ou 4 longueurs changer en temps réel ainsi que les trois rapports qui sont recalculés aussi en temps réel mais restent toujours égaux entre eux.

Spontanément certains lèvent la main pour raconter ce qu’ils ont observé…J’essaie de les faire patienter et propose de recommencer une fois le déplacement , et souvent à ce stade de la séance, ceux sont eux qui choisissent le point qu’ils voudraient voir déplacer. Puis, je leur demande d’observer à nouveau et de confirmer ou non leur première conclusion, pour eux-mêmes, sans qu’elle soit énoncée.

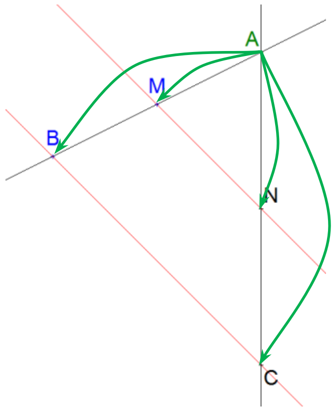
Quand la majorité des élèves semblent avoir quelque chose à dire, j'interroge un élève en lui demandant de formuler son observation par une phrase claire utilisant du vocabulaire mathématique….Je la répète à l'identique, demande aux autres si la formulation leur convient ou s'ils voudraient le dire autrement et il s'ensuit en général un échange avec la validation d'une ou plusieurs formulations finales dont une est choisie pour figurer dans le cours.

Ici, les rapports de longueurs s'affichent avec 10 décimales…donc les élèves sont vite convaincus que les rapports sont égaux….mais ce résultat reste encore très complexe à appréhender car six longueurs différentes sont concernées.

Par conséquent, je propose de recopier la figure projetée sur la partie droite du tableau en matérialisant les longueurs des segments concernés par des flèches partant du pompon, telles que représentées ci-dessous. Puis j'écris l'égalité des trois rapports en dessous, en utilisant une même couleur pour la lettre qui représente le pompon et le rouge des parallèles pour les noms des segments portés par ces parallèles. Je ne fais aucun commentaire oral et je m'y contrains sciemment afin de ne pas brouiller leur travail mental….qui, à ce stade, peut être bouillonnant !

L'essentiel de la perception offerte est ici visuelle.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



En me taisant, je montre avec le doigt comment écrire les rapports à partir des points de la figure.

J'explique alors que dans la représentation concrète du bonnet de ski : A est bien le pompon, M et B sont du même bord du bonnet et B correspond à la rayure, de même pour N et C. Les deux derniers rapports correspondent à la longueur de la petite rayure sur le bord du bonnet. Dans le langage mathématique, A est le point d'intersection des deux droites sécantes, M appartient au segment d'extrémités A et B et M appartient aussi à la parallèle intérieure et de même pour N et C….
Je leur demande encore de comparer l'écriture du troisième rapport avec celle des deux premiers , numérateurs d'une part et dénominateurs d'autre part….Les élèves observent que c'est comme si on supprimait le pompon. Voilà donc un moyen de vérifier qu'on a pris les bons points….

Je leur propose alors d'observer un troisième déplacement. Dans ce déplacement, A, M et B ne bougeront pas par contre N et C bougeront. Il y aura 3 longueurs que les élèves vont voir changer en temps réel sur la figure mais les rapports, eux, ne changeront jamais ! C'est effectivement assez spectaculaire à observer. Ceci crée une situation déstabilisante et il faut trouver pourquoi !

Je ressens un certain désarroi dans la classe….le logiciel serait-il déficient ?

J'essaie de faire formuler par les élèves le sujet de leur étonnement mais c'est parfois très difficile.

Je reformule alors l'observation : « des longueurs ont changé mais ici leur rapport n'a pas changé. Est-ce possible mathématiquement parlant ? ».

Les bons élèves qui ont un geste de réflexion efficace affirment que oui. Je leur demande d'essayer de me donner des exemples de nombres entiers distincts dont les rapports sont égaux… et il trouve des fractions égales
$\frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$ ….voilà la classe rassurée par ce retour au chapitre fractions…

Il faut ensuite rechercher pourquoi ce rapport ne change pas….et la réponse vient en général de la classe.

Vient ensuite la question de fond : « Quelle est donc la découverte de M. Thalès et à quoi cela va-t-il nous servir ? ». La réponse vient de la classe : « Calculer des longueurs de segments ».

<u>Observations pédagogiques :</u>

- L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet de généraliser une figure à toutes les positions possibles et de confirmer le résultat pour chacune. Il apporte la preuve expérimentale du théorème ce qui est très convaincant pour les élèves, même si cette preuve n'en n'est pas une pour le mathématicien ! La démonstration de ce théorème se fait par des calculs d'aires assez complexes, aussi j'ai choisi de ne pas la faire, ce que j'ai expliqué aux élèves.
  Dans ce cas, dans le cours, nous écrivons dans la marge "propriété admise" au lieu de " propriété démontrée par mes soins". En quatrième, la plupart des propriétés sont démontrées dans le cours.
- Ceci permet aussi à l'élève de réaliser le passage d'un dessin géométrique donné, figé sur sa feuille à la notion de figure mathématique qui reste vraie et déformable si ses conditions d'existence définies au départ sont respectées. Une figure géométrique devient ainsi une ensemble de relations et est évoquée en P3 sur du P2. Beaucoup d'élèves arrivent ensuite à se contenter de figures tracées à main levée et seulement codées. (article rédigé en annexe 3).
- L'utilisation de flèches pointées sur la figure et le jeu des couleurs sont des indices visuels pour favoriser l'écriture des rapports de longueurs. Je m'efforce de gestuer et de parler la constitution de ces rapports afin d'offrir des supports de perception divers et favoriser ainsi l'évocation perceptive, plus aisée que la perception évocative.[28]
- La répétition de la position du point pompon donne aussi des repères de reproduction en P2 pour l'écriture des rapports, de même pour le repérage de la disparition du point pompon dans le troisième rapport.
- L'explicitation du « pour quoi » du théorème permet de se projeter dans l'imaginaire d'avenir d'utilisation de ce théorème.

3. Troisième partie : évoquer la conclusion du théorème de Thalès

Trente-cinq minutes de cours se sont écoulées…j'énonce le fait que ce moment est historique car ils connaissent maintenant le théorème de Thalès, découvert il y a trois siècles…En exercice, il va falloir maintenant savoir, comme pour tout théorème, détecter sa présence et le mettre en œuvre correctement…

[28] Christiane Pebrel, dans note d'Antoine de La Garanderie, 08/03/2006

J'éteins le tableau numérique, il reste la figure avec les flèches et les rapports en couleurs et je demande aux élèves de le faire exister dans leur tête pour eux, avec les moyens qu'ils veulent….dans l'objectif de savoir le mettre en œuvre sur une figure nouvelle que je vais donner dans cinq minutes.

J'annonce que vais le mimer puis le laisser voir avant de le cacher.

Enfin, je ferme les battants du tableau et leur demande de le faire exister dans leur tête soit en images, soit en mouvements, soit en paroles.

Je demande à la classe si quelqu'un souhaite que je le raconte. Personne ne le demande.

Je leur demande alors de le faire exister comme ils veulent dans leur tête et une fois qu'ils l'ont, d'essayer de se le raconter pour eux même dans leur tête.

Je propose à certains élèves de bien vouloir faire profiter la classe de leur façon de faire en menant un dialogue pédagogique.

Beaucoup ont la figure avec des parallèles en rouge et avec les flèches de la même couleur et cela leur suffit, ils n'ont pas les rapports. Ils évoquent en P2 visuel. Un élève n'a que deux flèches car pour les autres, il dit que c'est pareil. Sur cette figure, certains ont rajouté des mots : plus petit sur plus grand et retour au pompon. Certains ne voient en P2 Visuel que les trois rapports avec la même lettre en vert quatre fois puis deux dernières longueurs en rouge de la même couleur que les parallèles qu'ils ne voient pas mais c'est un code implicite. Ils savent dire aussi que la lettre verte disparait dans le troisième rapport. L'image des lettres est floue mais la position des lettres et le code couleur suffisent. Ils font des liens en paramètre 3 entre la figure et les rapports.
Une autre me dit voir un vrai bonnet de ski et se parler « du pompon à la rayure et du pompon au bord »...évocation visuelle prolongées par une évocation verbale.
Je leur propose donc d'appliquer ce théorème sur une figure nouvelle que je dessine au tableau.

Cette figure a une orientation différente de celle qui est cachée derrière le rabat du tableau, les noms des points sont aussi différents, seules les parallèles sont matérialisées en rouge.
Les élèves prennent leur cahier de brouillon et écrivent en silence les trois rapports. Je passe dans les rangs pour enrôler tous les élèves…et une fois fini, je propose de comparer avec son voisin.

Je note très peu d'erreurs. Seule l'élève qui avait exprimé qu'elle se disait de revenir au pompon n'y est pas revenue et s'est trompée ....ce qui m'a permis de lui demander de prendre le temps de compléter son évocation soit par le ressenti du mouvement de la flèche de son point de départ à son point d'arrivée, soit par le fait de regarder le mouvement de la flèche avec ses yeux sur son image mentale, soit par la prononciation des mots « je reviens au pompon ». Elle a choisi de mieux regarder la flèche de son évocation et de se parler en plus.

Pour la correction, je demande à un élève de me raconter le processus qu'il a mis en œuvre :

1. Je cherche le pompon et je m'imagine la configuration de Thalès dans la figure qui m'est proposée .
2. Je l'applique à la figure en écrivant l'égalité des trois rapports.

L'étape : « Je fais exister l'évocation du théorème dans ma tête » n'est pas citée ici car elle est très présente !

La séance touche à sa fin, j'efface le tableau et demande aux élèves de me récapituler avec des mots ce qu'ils vont rechercher dans une figure pour appliquer le théorème de Thalès .

A ce stade, beaucoup répondent le pompon….et pourtant nous ne sommes pas sur un manège mais bien en cours de Maths !

Il y a un an, dans la même situation, j'aurais regretté de ne pas avoir eu le temps, pendant cette séance, d'écrire le théorème dans le cours. Aujourd'hui, je choisirai de ne pas le faire pour placer les élèves dans le projet de réactiver leurs évocations.

Le travail pour la séance suivante portera sur la réactivation du théorème de Thalès afin de proposer une phrase de rédaction et sur la recherche d'une série d'exercices consistant à valider la bonne application de Thalès tant du point de vue des conditions d'application que de l'exactitude des rapports.

Observations pédagogiques :

- Cette étape de l'évocation, hors perception, est aujourd'hui pour moi la plus importante de toute ….elle est absolument incontournable pour que les élèves gardent quelque chose de tout ce qui a été donné de voir et de comprendre. Mes élèves la pratiquent très volontiers, le silence est absolu, certains ferment les yeux, mettent leur tête dans leurs mains. Souvent certains me demandent et pour vous, c'est comment dans votre tête….et je me prête volontiers au jeu.
- Ils savent qu'ils ont tout le temps nécessaire et cela peut durer cinq minutes.
- Ils savent qu'ils ont le droit de faire comme ils veulent, qu'ils sont autorisés à faire des liens originaux et que leur parole sera respectée. Souvent, cela provoque de l'étonnement dans la classe.
- L 'évocation du théorème pour soi-même sera demandée à chaque début de cours sur ce chapitre et très souvent quand elle sera rencontrée ultérieurement dans un exercice de géométrie.
- Ils savent qu'il est nécessaire de réactiver cette évocation régulièrement et surtout avant d'appliquer le théorème. **C'est maintenant sur cet entrainement que je souhaite mettre l'accent en provoquant des pauses évocatives avant que l'élève ne se précipite sur son crayon !**
- **Il faut donc prévoir l'éducation à l'évocation systématique au moment de l'apprentissage mais aussi après ! Sans avoir permis aux élèves de prendre conscience de leurs évocations, d'avoir le projet de les réactiver, il est difficile de leur apprendre comment réfléchir et faire des liens pour comprendre.**

La double présentation est un outil très puissant pour permettre à chacun de pratiquer sa propre langue pédagogique et susciter ainsi pour chacun une évocation perceptive.[29] Mes élèves se sont très souvent plaints de mon rythme trop rapide, du fait que je parlais en écrivant et que cela les gênait considérablement. Le fait de m'appuyer sur la preuve de l'efficacité de cette technique de présentations séparées (je montre, je mime ou je parle) m'a procuré beaucoup de sérénité dans ma pratique. Je peux la mettre en œuvre systématiquement en confiance en apportant sécurité et confort à mes élèves qui sont maintenant habitués à cette pratique, qui marque aussi pour eux l'étape la plus importante du cours.

[29] Christiane Pebrel, dans notes d'Antoine de La Garanderie, 08/03/2006

4. Dialogue pédagogique sur Thalès

Le lundi 7 mai 2012 à 11h30, j'avais rendez-vous avec quatre élèves de la même classe de quatrième qui avaient accepté de répondre à mes questions sur le chapitre de Thalès. Noémie est dyslexique, elle a participé à six séances de méthodologie en début d'année, les autres Lucie, Camille et Amélie, sont globalement de bonnes élèves qui n'ont eu aucune séance particulière de méthodologie.

Voici les consignes :

« Je vais vous demander d'aller chercher dans vos têtes tout le processus qui s'est déroulé pour vous depuis le début du cours, c'est-à-dire il y a deux séances (mercredi et jeudi derniers). Je vous ai donné à voir, des dessins , des longueurs, des rapports qui changeaient ou non …j'ai essayé de ne pas trop parler.

Dans un deuxième temps, je vous demanderai « aujourd'hui Thalès comment il existe dans votre tête? ».

Vous parlerez l'une après l'autre en vous écoutant. Il n' y a aucun objectif d'évaluation de vos connaissances dans cette démarche. »

Je n'ai rapporté ici que les commentaires de Camille et de Lucie, qui révèlent des profils assez caractérisés.

Ce qui a été dit	Hypothèses Gestion Mentale
<u>Camille : (4 'à 10')</u>	
Je vois une image : deux droites sécantes avec un point d'intersection qui s'appelle le pompon. Après il y a deux droites parallèles qui sont sécantes à ces deux droites, l'une s'appelle la rayure et l'autre la base.	
N : Ces mots: pompon, rayure, base , comment existent-ils dans ta tête ?	
C : Je les entends.	
N. Tu te sens montrer les choses avec ton doigt ?	
C : oui, en fait, c'est la figure qui se projette dans ma tête et j'entends ma voix.	
N : *J'ai essayé de savoir ce qui avait pu être utile à Camille durant la séance…..*	P2 visuel + P2 verbal
C. En voyant la figure au tableau, j'ai mémorisé la figure et puis après, c'est resté.	
N. Et les rapports, comment tu les as perçus, en fonction de tous les changements qui ont été montrés au tableau ?	A pris la figure du tableau en photo P2 visuel avec le projet de la mémoriser
C : Déjà, il y a des couleurs, les 2 droites parallèles, elles sont en rouge et pour les rapports, il y a des flèches vertes.	
N : C'est comme le dessin que j'avais fait sur la partie droite du tableau.	

C. oui. N : Vois tu les rapports écrits ? C : Non, je vois juste les flèches. Je suis les flèches avec les yeux. N. La couleur, c'est important pour toi ? C : Oui, pour distinguer ce qui est parallèle , pour m'y retrouver un peu dans mon dessin. N. As-tu défini une stratégie avec des étapes pour appliquer Thalès ? C. Vous avez donné une technique de calcul, toujours la même lettre sur les deux premiers rapports puis petit côté sur grand côté….. N. Ces rapports tu les affiches ? C. Non, je les ai avec les flèches qui me font toujours revenir au pompon et qui partent du pompon. N. Le fait que Perrine l'ait dit en cours qu'il fallait revenir au pompon, cela t'a aidé ? C. Oui, car sinon j'aurais fait l'erreur .Je me le dis mais une fois que j'ai fait l'erreur, je la reconnais et je ne la refais plus. N : Pour éviter l'erreur, comment tu fais ? C : Je retiens qu'il ne faut pas…. Avant de commencer quelque chose, je me fais une liste de ce qu'il ne faut pas que je fasse et de ce qu'il faut que je fasse…. N : Tu l'entends cette liste ? C : Je me la raconte avant de commencer un exercice….Pour Thalès, c'est « toujours que je revienne au pompon, toujours que ce soit petit côté sur grand côté »….ça suffit ….en même temps j'ai le dessin avec les flèches. Un exemple concret c'est plus facile à retenir...	P2 visuel, code couleurs et flèches P3 sur P2 P3 verbal automatisé en P2
<u>Lucie : (10' à 15')</u> Moi je n'ai pas de pompon, ni de rayure. J'ai la figure, je le sais et pour moi, c'est logique . L : Je pars du sommet opposé aux 2 parallèles , je vais jusqu'à la première parallèle, puis jusqu'à la deuxième parallèle en partant du sommet opposé puis je fais la même chose de l'autre côté puis c'est les parallèles, c'est petit sur grand .	P3 sur P2 bien installé P2 visuel avec du P3 lié à la rédaction d'une démonstration automatisé en P2

N. Tu te le racontes, tu le vois, tu te déplaces sur ta figure ? L : Il y a une figure et à côté il y a marqué « données » et il y a écrit un triangle, les parallèles et le point appartient à….et comme ça je peux directement faire mon « je sais que »…. N : tu as des couleurs et des flèches ? L : les parallèles oui, pas de flèches.	P2 visuel, Lucie semble avoir de solides repères pour mémoriser ce code.
N : Et les rapports, comment ils existent ? L. Je vois un schéma mais c'est un peu flou. Pour les deux premiers rapports, le sommet opposé aux parallèles, il y est quatre fois….J'ai quatre lettres en rouge et c'est la même et le dernier rapport, il est de la même couleur que les parallèles sur le dessin. Je ne me parle pas sur le dessin.	Par un geste de réflexion, Lucie fait retour sur son acquis qu'elle superpose à la figure de l'exercice, en évocation visuelle.
N : Tu n'as donc pas du tout le bonnet de ski ? C. Non, cela ne me sert à rien mais cela ne me gêne pas. N. Et comment tu vas faire dans une configuration complexe pour reconnaitre une configuration de Thalès. L. Il faut chercher deux parallèles avec un sommet opposé aux parallèles. N : Tu te le dis ? Comment tu fais ? L : J'essaie de placer mon triangle, le triangle que j'ai dans ma tête sur la figure. Je sais ensuite que c'est dans ce triangle là qu'il faut se placer. N. Et pour le nom des points ?	Je suis surprise de constater combien Lucie met en œuvre de façon autonome et systématique les petits trucs que j'indique aux élèves pour prendre des repères dans une figure de géométrie. Elle a un grand souci d'efficacité.
L. Après, je change les points ….J'extrais le triangle de la figure de l'exercice en le traçant à main levée à côté , je mets de la même couleur les parallèles et je surligne les longueurs que je connais dans les données. N. Est-ce que tu peux dire que tu fonctionnes par ressemblance avec la figure que tu as dans la tête ? L : oui, avec la figure qui était au tableau….(qu'elle a donc dans la tête) N. *De ce fait, je lui demande si l'animation a été utile pour elle et qu'est-ce que cela a pu lui apporter ? de constater que les rapports restaient égaux même si certaines longueurs changeaient….Est-ce que cela t'a servi à quelque chose ?*	Besoin de preuve : expliquant

L. Cela prouve que les rapports sont les mêmes même si on change. Si on traçait plusieurs figures (sur le cahier), les rapports vont changer mais on ne pourra pas savoir alors que si on bouge avec la main sur la même figure, cela a permis d'en être sûre. N. C'est important pour toi d'en être sûre ? L : Sinon ça ne marche pas dans ma tête. N : Si je t'avais dit tu me crois parce que c'est moi le prof qui te le dis.Est-ce que cela t'aurait suffi ? L : Il faut le prouver . N : Tu en as besoin toi ? Les démonstrations , elle te servent. C'est important pour toi d'en faire? L : Oui, de prouver par moi-même souvent. Dix minutes plus tard , Lucie fera la remarque qu'on n'est pas toujours obligé de faire petit sur grand mais que ce qui est important c'est de toujours faire la même chose….petit sur grand ou bien grand sur petit….	Expliquant, première personne Souci de globalité

Bilan personnel : Le fait d'avoir énoncé dès le départ ma deuxième question a orienté la réponse des élèves vers l'état final de ce qu'elles ont gardé de Thalès plutôt que la façon dont cette évocation s'est installée.

Je suis frappée d'observer combien l'effet couleur tant sur les parallèles que sur les rapports de longueurs ainsi que la symbolique spatiale des flèches sont puissants et se suffisent à eux mêmes !
L'appui concret du bonnet de ski me permet en fait de faire un raccourci de langage bien utile (le pompon plutôt que le point d'intersection des deux droites sécantes) mais il n'est pas pratiqué systématiquement notamment par les bons élèves qui ont exprimé ces repères dans un langage plus mathématique.

Je mesure aussi la force de preuve de l'animation par le logiciel de géométrie dynamique.
Pour Lucie, elle est alors sûre que le théorème est vrai car son projet de sens expliquant a été nourri par la diversité des situations présentées.

De plus, elle a aussi retenu qu'on pouvait faire l'inverse de "petit sur grand"...alors que je ne l'ai évoqué que rapidement et à l'oral. Elle a une démarche de compréhension globale et vraisemblablement spatiale, on sent qu'elle a besoin du tout pour adhérer à une approche donnée alors que d'autres se limitent à une méthode qui marche afin de ne pas s'embrouiller...

b) Comment mémoriser les propriétés de géométrie ?

Après avoir interrogé le groupe des quatre filles sur Thalès, je leur ai demandé de façon plus générale comment elles appréciaient la variable couleur car j'ai noté combien elles ont insisté sur l'importance de cet effet.

Puis, nous en sommes arrivées à un sujet crucial en géométrie : "Comment mémoriser la trentaine de propriétés de géométrie à acquérir en quatrième ? "

Ce qui a été dit	Hypothèses GM
Premier thème : Est-ce utile de mettre les parallèles en couleur ? Les autres années, le pratiquiez-vous déjà ? Quel est l'apport de cet effet couleur ? (30' à 35') Camille : Moi, les autres années, je ne réfléchissais pas à comment je faisais pour retenir…je n'avais pas des techniques d'apprentissage ..du coup, je n'étais pas très forte en Maths. Là cela m'a beaucoup aidé et du coup, je retiens mieux et je comprends mieux. N : Qu'est-ce qui t'a aidé ? C : Justement , les techniques, par exemple de nous raconter ce qui se passe dans nos têtes, cela m'a aidé à comprendre comment cela fonctionnait, cela m'a aidé… N. Alors de te raconter ce qui se passe dans ta tête, est-ce que tu peux nous expliquer comment tu fais ? C. Par rapport à l'image, je raconte ce que je vois. N : Ah et tu as besoin de raconter ce que tu vois ? C. Ca m'aide beaucoup, oui. N : Eh, pourquoi ça t'aide beaucoup ? A quoi ça te sert ? C : parce que j'ai une image dans la tête, cela me permet d'être sur quelque chose qui est fixe, que je suis sure que c'est vrai et du coup….silence…. N : Cela te permet de lancer ta réflexion ? C : oui N : Et cela te met en lien avec quoi dans ta tête? C : en fait mon dessin, vu que je sais qu'il est vrai , j'en suis sûre. Après, je vais pouvoir dire quelque chose par rapport à ça. N : Et qu'est-ce qui se passe dans ta tête quand tu te parles ton dessin ? Il y a –t-il autre chose déjà dans ta tête qui fasse écho ? C : ……C ne sait pas… **Deuxième thème: Comment apprendre les propriétés de géométrie ?** N : Et tes propriétés comment tu les stockes dans ta tête ? C : les propriétés , déjà je les apprends et après je les sais ! …….Je les apprends et après au fil des exercices, je vois des schémas d'exemples et puis ces schémas d'exemples avec tous les dessins et tout ça et bien je me les projette quand on me demande de réciter la propriété et du coup la propriété elle vient…. C : Déjà, en premier, je les apprends . N : Apprendre….qu'est-ce que cela veut dire pour toi ? C : Déjà, Je les lis plusieurs fois, j'attends cinq minutes que cela rentre et après, je les récite à voix haute. N :Et tu les as comment dans ta tête ?	Camille est sensible aux conseils méthodologiques que je donne en classe entière. Prise de conscience de sa capacité introspective Besoin du support de l'image pour raconter...Un P2 verbal qui a besoin de s'appuyer sur du P2 visuel. Le caractère vrai de la figure du "si" de la propriété en P2 visuel est un évoqué stable qui va servir de loi dans le geste de réflexion. . Itinéraire : P2 verbal puis P2 visuel pour ne garder que l'image sur laquelle elle peut se raconter la propriété. Confirmation de l'itinéraire

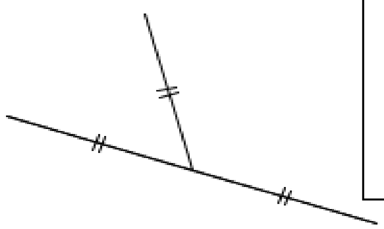
C : Après, je m'entends parler. Et puis, après, quand on fait des exercices et tout cela, j'ai des images qui se mettent en place. N : Quel est le rôle des exercices ? C : Cela permet de mieux retenir et de pouvoir appliquer ce qu'on sait. N :Dans ta tête, cela produit quelque chose ? C :Cela produit des images et du coup, c'est plus facile de retenir. N :Pourquoi ? C :Pour moi, moi j'arrive mieux à retenir une image que des phrases. C'est plus facile pour moi de raconter une image que de raconter une propriété ou quelque chose que je me dis. N : Le support de l'image est important aussi pour raconter la propriété même si tu commences par te la réciter ? C :Oui, et après cela se met en place…	Ne faudrait-il pas lui proposer de construire l'image en visuel dès le début de l'apprentissage puisqu'elle est dans le cours !
N :Et après, tu gardes quoi finalement ? Tu ne gardes que l'image au bout du compte ? C :Que l'image, mais cela dépend en fait . Parfois , quand je retiens très très bien, je m'entends le parler mais sinon j'ai une image que je vois. En général, ça va, je la vois bien et je me la raconte. N. D'accord tu te la racontes. N : Et tu sais qu'une propriété , parfois on ne peut pas la raconter dans n'importe quel sens. Comment tu fais pour te souvenir dans quel ordre il faut la dire, commencer par le bon point, la bonne droite pour réussir à dérouler la	Forte confiance dans le fait de réussir à verbaliser une image visuelle.
propriété ? Tu as un truc toi pour réussir à raconter dans le bon sens une image que tu as en tête? C : Pour moi, c'est logique. A partir du moment où je l'ai apprise, je sais que c'est comme cela et pas autrement….. N : Alors, c'est un effet de mémorisation uniquement ? C'est l'enregistrement de la mémoire ? C : Après, tout de suite, je sais que c'est comme cela et que ce sera pas autrement. N : Ah bon et sur ton image tu n'es pas obligée de prendre des repères, des choses en couleur….qui te permettraient de la déclencher dans le bon sens, de parler d'abord de ce point là ou de cette droite là plutôt que d'un autre ….parce que c'et souvent complexe une figure… C : Non, en général, c'est logique et les couleurs, ça m'aide surtout pour les droites parallèles, des angles ou des choses comme ça. C : Cela ne m'aide pas pour me dire c'est ça qui faut dire en premier…	En maths, tout est logique....
N : Comment tu fais alors pour le savoir ? C : Quand j'apprends mes propriétés, je retiens bien ce modèle là et puis je sais quoi… N : Ce modèle là ??	Reproducteur
C : La propriété , elle est comme ça et puis voilà. N : Aurais tu un exemple à me donner d'une propriété où tu pourrais commencer de façon différente et pour laquelle tu aurais pu hésiter….as tu souvenir un jour d'avoir eu du mal à mémoriser une propriété ?	Oui, c'est vrai mais parfois elle n'est pas si simple à retrouver....

Camille ne trouve pas ,aussi, afin de faire participer les trois autres filles, je décide de leur proposer de me réciter une propriété qui s'appuie sur une figure complexe. Cette propriété peut se formuler au choix de deux façons différentes. Elle a été étudiée il y a trois mois environ, elle est souvent réactivée mais reste très difficile à restituer pour bon nombre d'élèves.
Je fais le dessin au tableau et je code les données sur la figure. Je leur demande de la mettre dans leur tête puis je l'efface et je leur demande de se la raconter pour elle-même et de lever la main quand elles sont prêtes.
(37' à 52')

<u>Les deux formulations de cette propriété</u> :

Si, dans un triangle, le milieu d'un côté est équidistant des trois sommets du triangle alors ce triangle est rectangle.

Si, dans un triangle, la médiane issue d'un sommet mesure la moitié du côté opposé à ce sommet alors ce triangle est rectangle.



Lucie dit qu'il y a plusieurs formulations….
C : C'est compliqué à expliquer ….
N : Ton automatisme par mémorisation, revient-il ?
C : Non….
N : Tu veux essayer tout de même, si tu n'y arrives pas, ce sera intéressant d'essayer de décider de moyens à prendre…..
Lucie : Moi non plus, je n'y arrive pas….je me souviens dans une démonstration, j'avais laissé en blanc la partie « D'après la propriété : »
Lucie : Il y avait un espèce de cercle circonscrit….
N : mais il n'y a pas de cercle !
Lucie : mais il y a des points équidistants….
Noémie : il y a une médiatrice….
Lucie : non, c'est une médiane…
Lucie : C'est la médiane qui est équidistante des trois sommets…
N : une médiane, c'est une droite, elle ne peut pas être équidistante de points….
N : Camille, comment tu te sens ? Tu imagines, tu es en contrôle , comment tu fais ? Tu fais revenir dans ta tête tout ce que tu as appris, parce que tu as travaillé toi ! Est-ce que cela revient ?

C : Non, je sais que il faut commencer par : « Si dans un triangle, »
N : Camille, prenons ta stratégie : "moi je regarde ce que je vois sur la figure et cela va m'aider …".Est-ce que vous pourriez regarder la figure dans votre tête et vous raconter ce qui est écrit sur la figure pour vous-même avec vos mots ? On ne cherche pas la propriété. On se raconte juste la figure .

Souvenir lointain mais absolument exact pour Lucie

Ici, Camille s'aperçoit donc que ce n'est plus si logique...et que sa mémorisation auditive lui fait défaut, bien qu'elle ait l'image de la figure...qui n'est donc pas si facile à raconter...

Souvenir du contexte du chapitre, retour à la globalité de Lucie alors qu'ici il n'y a pas de cercle tracé !
Lucie donne du sens en P3, précision en P2
Essai de P3 mais erreur de vocabulaire

On le fait en silence puis on écrit sur sa propre feuille de papier sans le dire à voix haute pour ne pas gêner ses camarades. *Lucie a besoin de l'image, elle la dessine et marque directement les données en langage mathématique à côté de la figure. Elle écrit aussi des mots avec du vocabulaire mathématique bien choisi.* Amélie : Je la connais. N : as tu un repère pour toi même? Amélie : Je vois trois longueurs égales et cela me suffit…. N : As-tu un déclencheur dans ta tête ? Amélie : non, en me racontant la figure, la propriété revient comme un perroquet. *Je demande alors à chacune de retrouver la propriété exacte, avec le si et le alors…* N à Lucie : Tu arrives à trouver des mots. Il faudrait peut-être faire des liens avec tout ce que tu as. Qu'est-ce que tu as écrit que tu peux prendre comme mot clé ? Lucie : j'ai des mots clés qui ressortent : milieu, équidistant et médiane...je ne vais pas utiliser médiane… N : Pourquoi ? Lucie ne sait pas répondre….mais elle écrit de façon juste la propriété formulée avec le mot clé milieu…avec un grand sourire…. N : tu as un perroquet qui revient dans ta tête ? Lucie : oui Camille : J'avais besoin de me raconter un peu et puis c'est revenu. J'ai écrit : Dans un triangle, une droite passe par un sommet et par le milieu d'un côté et après cela m'a fait un lien avec médiane….et avec la propriété que j'avais mémorisée. N : Amélie a écrit cette propriété avec comme le mot clé médiane ...essayez chacune de m' écrire cette propriété avec les deux formulations, l'une a pour mot-clé milieu et l'autre médiane. Noémie s'empêtre dans le vocabulaire, les mots s'emmêlent…. Lucie n'y arrive pas, …. je lui demande d'effacer le nom des points de sa figure puis de passer le doigt sur la médiane ….elle ne trouvera pas la bonne formulation! Camille réussira à l'écrire avec le mot clé milieu ! alors qu'Amélie non...	Appel au P2 verbal pour faire des liens avec des mots déjà stockés qui pourraient réactivés l'énoncé de la propriété. Besoin de globalité à projeter à l'extérieur P2 verbal sur P2 visuel, geste de mémorisation efficace. Retour au stock en P2 verbal, Mémoire auditive ? J'aurais du questionner davantage car Lucie a un profil très visuel Paramètre 3 en exclusion du mot médiane Réactivation de la mémoire par un retour au stock en P2 verbal sur du P3 verbal pour Camille. Beaucoup de difficultés avec le P2 verbal pour Noémie qui est dyslexique. Amélie avait atteint son objectif d'en connaitre une , elle fait très bien mais juste ce qu'il faut !

Bilan personnel de ce DP :

J'ai ressenti chez Camille une certaine sérénité d'avoir découvert comment s'y prendre pour elle même. Cette élève est effectivement très volontaire et je peux l'observer en "travail mental" en classe...
Son témoignage a été un beau cadeau car j'ai pu constater que des conseils lancés en classe entière peuvent être exploités par des élèves qui ont envie de progresser !

Comme tout enseignant, je suis parfois un peu découragée de constater que beaucoup ne savent pas réciter les propriétés de géométrie même si ils les identifient et connaissent le résultat ! Ceci me conforte dans l'absolue nécessité de faire noter chaque propriété sous forme visuelle en dissociant clairement la figure du "si" de celle du "alors". Je m'adressais à trois bonnes élèves et j'ai été satisfaite d'avoir réussi à les mettre à l'épreuve en leur faisant découvrir un moyen de dépasser leur difficulté. Je n'ai malheureusement pas eu le temps d'en faire le bilan avant de les quitter mais je sais qu'elles ont pu tirer profit de cette expérience.

J'anime des ateliers sur "Comment apprendre les propriétés de géométrie" et voici des propositions que je formule :
- <u>A des élèves à prédominance visuelle</u> : Se raconter la figure de façon à dissocier les divers éléments qui la constituent (du global au détail). Placer des clignotants, des couleurs, des étiquettes sur la partie de la figure qui est à décrire en premier...et qui constituera ce que j'ai appelé le mot clé. Quand l'ordre du récit de la propriété correspond à celui de la construction de la figure, se fabriquer un film avec les différentes étapes de construction de la figure qu'ils racontent donc successivement .
Le sujet spatial risque de garder un évoqué statique d'une propriété. En effet ce dernier a une représentation finale spatiale ou « état initial » et état final » sont confondus. Or les propriétés devront être utilisées lors de démonstrations. Une démonstration a, par nature, une structure spatio-temporelle (si : « état initial » « transformation » alors : « état final ») que l'apprenant doit prendre en compte. En permettant aux sujets « spatiaux » de mettre du temps dans leur « espace mental » l'enseignant favorise l'accès à la démonstration.
- <u>A des élèves à prédominance verbale</u> : Apprendre les propriétés en les chantant ou en se parlant dans sa tête, sur un rythme avec des cadences pour chaque partie de la phrase et essayer aussi de construire un film comme support du temps qui se déroule. Découper le temps en temps intermédiaires, en étapes ordonnées permet de mettre une certaine spatialité dans un déroulement temporel
- <u>A des élèves à prédominance auditive</u> : Enregistrer les propriétés dans leur portable pour les réentendre...et essayer de construire un support visuel de type film aussi.

J'ai pu constater de réels progrès chez certains élèves faibles et démunis en début d'année. L'une d'elles a eu 16/20 au contrôle commun de géométrie et elle m'a avoué qu'ayant compris qu'elle a besoin d'images, elle apprend désormais son cours d'histoire en se fabriquant des documentaires et ça marche !

En cours, hors perception, je fais pratiquer l'évocation de la figure du "si" et celle du mot clé lors de l'apprentissage de la propriété.
Je donne aussi beaucoup de petites interrogations de cours qui sont "surprise" sur le chapitre du moment et annoncées lorsqu'elles nécessitent des révisions.
Je planifie donc pour mes élèves les réactivations nécessaires au bon fonctionnement de leur mémoire.

c) Comment constituer le sens du centimètre carré en sixième ?

Mon objectif pédagogique a été de réinvestir la notion de périmètre, le plus tôt et le plus souvent possible dans l'année, afin de dédier, en mai, un chapitre à l'étude de l'aire d'une figure . A la fin de ce chapitre, les deux grandeurs seront exploitées dans des exercices concrets afin de vérifier la connaissance differenciée des élèves.

J'avais déjà abordé la notion d'aire un mois plus tôt mais seulement pour la differencier du périmètre. Nous avions alors utiliser le compas pour le calcul du périmètre et présenter l'utilisation de la mosaïque pour le calcul de l'aire.

J'avais expliqué que le périmètre et l'aire s'appellent des grandeurs en mathématiques car ils se mesurent et ils sont exprimés dans une unité de mesure donnée, qu'il ne faut pas omettre de préciser. Le périmètre des polygones particuliers avait été étudié mais pas leur aire, celui du cercle avait été abordé en tout début d'année.

Pour la première séance, les élèves avaient eu à faire des exercices de calculs d'aires de figures qui , par découpages et recollements, donnaient un rectangle.

Avant de commencer, je souhaitais connaitre leurs représentations concernant l'unité de mesure « le cm^2 » .

1. Tracer une figure d'aire égale à 1 cm^2 puis une figure d'aire égale à 3 cm^2 :

A. Je leur ai demandé de faire exister dans leur tête ce que pourrait être **<u>une figure d'aire égale à 1 cm^2 .</u>** [30]

Sur une feuille blanche sans quadrillage, je leur ai demandé de le représenter comme il le souhaitait en mots, en dessins…en leur demandant de me montrer clairement où est le cm^2 .

J'ai obtenu :

1. <u>Par l'élève A</u> , un carré de périmètre 1 cm dont chaque côté mesure $\frac{1}{4}$ de cm avec l'égalité suivante :

$1\ cm^2 = \frac{1cm}{4}$ = 2,5 mm. Il m'a dit : « C'est un cm qui forme un carré, c'est logique… »

Cet élève a pris les mots de la consigne dans leur ordre chronologique comme il les a entendus : un centimètre en carré, ce qu'il a fait en écrivant de surcroît la fraction un quart sur le côté du carré. C'est un élève redoublant qui est très ancré dans des évocations concrètes (P1).

2. <u>Par 8 élèves</u> : Un carré dessiné à main levé mais codé avec quatre angles droits et quatre côtés égaux , de 1 cm de côté. J'ai lu « un cm^2 est l'ensemble du carré ».

La majorité des élèves a assimilé le centimètre carré à un carré de un cm de côté, sans expliciter du tout la notion d'aire. Ils ont décomposé les mots qu'ils reconnaissaient : centimètre et carré pour tracer une figure qui faisaient écho à des acquis codés en paramètre 2. Le sens du mot aire n'est pas acquis.

3. <u>Par 6 élèves</u> : Ce même carré codé en tant que carré mais colorié à l'intérieur et parfois le mot « intérieur du carré ou surface du carré» . Un élève a écrit : « le cm^2 est à l'intérieur du carré ou de la forme, cela peut être des courbes. ». Mais à la consigne suivante, (tracer une figure d'aire égale à 3 cm^2) , ces élèves ont tracé un carré de 3 cm de côté….

L'évocation du cm^2 comme unité n'est pas en place. Il y a assimilation de 3 avec la longueur du côté d'un carré et non attribution de 3 au nombre de carré « unité ».

---

[30] Armelle Géninet, stage de mathématiques en primaire

4. <u>Par 6 élèves</u> : une bonne réponse. Un élève, qui se souvenait avoir été corrigé précédemment, m'a écrit la phrase que je lui avais dite à l'époque : « le cm^2 est la mesure de la surface qui est à l'intérieur d'un carré de 1 cm de côté» . Il m'a exprimé que dans sa tête, il voyait cette phrase écrite à côté du dessin du carré. Cet élève fait beaucoup de liens, il semble avoir un projet de sens « Problématiseur », il pose toujours des questions commençant par « et si », en faisant référence à ce qui a été étudié.
Une élève a écrit : « le cm^2 est la surface pleine du carré de 1 cm de côté"et il m'a expliqué qu'autrefois on calculait l'aire avec un carré de 1 cm de côté qu'on appelait 1u , on le plaçait dans la figure pour calculer l'aire de la figure. ». Le « comment on s'en sert » avec l'idée de mosaïque …a permis à cette élève (avec un projet de sens appliquant) de garder le sens de cette grandeur !

5. <u>Deux élèves</u> ont dessiné un carré et dit que « je pense qu' un carré de 1 cm^2 a un périmètre égal à 1 cm » ou que « tous les côtés additionnés doivent mesurer 1cm » mais que « le cm^2 est la mesure de la surface qui est à l'intérieur du carré ». Ces élèves ont séparé les mots centimètre et carré et ont attribué le centimètre, mot lu en premier, non pas au côté du carré, mais à son périmètre car effectivement, un périmètre se calcule en cm ! Ils ont été "rattrapés" par leurs acquis et n'ont pas assimilé réellement la notion du centimètre carré dans la totalité du code de sa définition. Peut-être avaient-ils aussi pour projet de m'exposer leur savoir et de m'en donner plus ce que je ne demandais !

6. <u>Deux élèves voisines</u> ont tracé un carré dont les diagonales mesurent 1 cm.

7. <u>Un élève</u> a dit que cela peut aussi être un losange….qui ressemble fort à un carré pour la longueur de ses côtés et qui a la particularité d'avoir aussi quatre côtés de même mesure. D'ailleurs, cet élève n'avait pas codé les angles droits sur son carré. Il semble avoir utilisé un lien de similitude…
De plus, certains élèves ont donné la formule de calcul Lxl et écrit 1x1=1 (paramètre 2)
Un élève a multiplié les quatre longueurs du carré : 1x1x1x1 = 1 et il a aussi additionné les quatre longueurs puis diviser par 4 pour obtenir 1…tous ces calculs l'ont en tout cas rassuré ….ce dernier élève est très consciencieux, perfectionniste et reproducteur. Il a l'impression que le code, le calcul est un gage de sérieux et de preuve. Déjà en sixième, il pose des inconnues et écrit des équations…le plus souvent fausses…Il est trop dans un paramètre 2 dépourvu de sens sans faire de liens entre des évocations concrètes, des évocations plus abstraites et le code à mettre en place et à comprendre.
Ici, ces calculs sont faits pour arriver au résultat « 1 » mais n'ont aucun lien avec la notion d'aire !

B. Tracer une figure d'aire égale à 3 cm^2

J'ai ensuite demandé aux élèves d'imaginer puis de représenter <u>**une figure d'aire égale à 3 cm^2.**</u>

J'ai obtenu : 1.<u>Par l'élève A</u>, un carré de périmètre 3 cm dont chaque côté mesure – de cm avec l'égalité suivante : 3 cm^2=$\frac{3\ cm}{4}$ = 7,5 mm. Il est resté fidèle à sa logique !

2. <u>Par 14 élèves</u> : Un carré de trois centimètres de côté, décomposé même parfois en 9 petits carrés et coloriés ! J'ai pu observer la prégnance du mot carré, qui seulement prononcé à l'oral car non visible dans la forme écrite de la consigne, prend le dessus sur les mots auxquels il est associé et qui déclenche des automatismes très puissants en paramètre 2.
De très bons élèves, pourtant dotés d'un certain esprit critique, n'ont pas reconnu leur erreur, une fois la figure tracée. Peut-être aurais –je du leur demander expressément de vérifier si leur figure répondait bien à la question posée ?

3.Parmi les 6 élèves ayant donné une bonne réponse pour « 1 cm^2 » , certains élèves sont restés bloqués car en appliquant la formule LxI , ils trouvaient non plus 3 mais 9.
Ce fut le cas de Marie dont les acquis en paramètre 2 lui indiquaient que ce ne pouvait pas être un carré. Puis, elle s'est redit la consigne dans sa tête et le mot figure a fait tilt pour la libérer de l'emprise du carré. Elle s'est ensuite autorisée à tracer trois carrés de 1 cm^2 (selon ses dires en dialogue pédagogique mené en fin de cours).

4. Les mêmes deux élèves ont dit que le périmètre du carré doit être égal à 3 cm.

5. Les deux mêmes élèves voisines ont tracé un carré dont les diagonales mesurent 3 cm.

6. Le même élève a dit que cela peut aussi être un losange de côté 3 cm.

2. La définition du centimètre carré :
J'ai ramassé les feuilles des élèves sans faire aucun commentaire et j'ai proposé de commencer le cours.
Mon objectif était d'abord de généraliser la notion de figure comme une ligne quelconque fermée puis de donner la définition du périmètre et celle de l'aire. Par des exemples, j'ai voulu montrer que le nombre qui représente la mesure de l'aire d'une figure donnée dépend de l'unité d'aire choisie, enfin que découpages et recollements ne modifient pas le calcul de l'aire d'une figure mais le facilitent, quand c'est possible. Le périmètre et l'aire d'une figure sont deux grandeurs, car elles se mesurent, mais elles sont indépendantes. Par ailleurs, étant des grandeurs, le périmètre et l'aire appartiennent au domaine des nombres exprimés dans une unité choisie. C'est pour cela qu'on peut écrire le signe égal :
A = 34 cm^2 et P = 56 cm par exemple.

Mon objectif est ici de permettre de classer les notions nouvelles dans des catégories déjà connues, de susciter des liens d'analogies et de rappeler la précision du code mathématique qui doit être respecté.

Puis en partie II du cours, j'ai écrit la définition de l'unité d'aire légale : le mètre carré :
"mesure de la surface emprisonnée dans un carré de 1 m de côté."
Oralement , j'ai fait un rappel de l'utilité de la construction du système décimal avec son tableau d'unités …et j'ai expliqué que pour les mesures d'aire, les hommes avaient cherché à faire la même chose….d'où la définition du mètre carré, comme unité légale d'aire et, par similitude, celle du centimètre carré. La référence à l 'histoire m'est toujours très utile pour démontrer l'intérêt des systèmes et des règles inhérents aux mathématiques et qui sont un réel carcan pour certains élèves.
C'est aussi une exigence de mon projet de sens « expliquant » qui « nourrit » le projet de sens des expliquants, mais aussi enrichit les projet de sens des appliquants.

J'ai alors tracé un carré codé à main levé avec la légende de 1 cm sur un côté et je leur ai demandé de me montrer où était le centimètre carré. Beaucoup m'ont dit qu'il était là devant nous, en la seule présence du carré…

Je leur ai dit qu'on voyait effectivement un quadrilatère ayant quatre côtés égaux et quatre angles droits…et que cet objet mathématique avait été précédemment défini comme un carré, plus généralement un polygone, mais que je ne voyais pas un centimètre carré au sens de la définition écrite au -dessus.

Je m'efforce toujours devant les élèves de jouer au candide en faisant des retours stricts et fréquents aux lois (définitions et propriétés) déjà étudiées afin de laisser les élèves débattre puis décider de la justesse d'un résultat annoncé. En début de sixième, les élèves découvrent qu'il ne faut pas se fier à l'apparence d'un dessin.(voir article annexe 3).

Je leur ai demandé alors de relire pour eux-mêmes, en silence, tous les mots de la définition les uns après les autres et de les faire exister dans leur tête chacun pour ce qu'il est….Après un temps de silence, j'ai fermé le tableau puis j'ai lu à voix haute la définition afin d'apporter une perception auditive. Un élève s'est exclamé « alors ce carré il ne peut pas être vide ! ».
Cet élève semble fonctionner par différences ou bien, l'absence de perception l'a amené à évoquer !
Encore une fois, voici illustrées la puissance de la double présentation et la force de l'évocation !

Après approbation de la classe, nous avons convenu que, jusque-là, nous ne nous étions pas intéressés à cette caractéristique concernant les figures que nous avions déjà étudiées. J'ai proposé la comparaison d'un cerceau de gymnastique pour le cercle au CD qui lui est plein et qui définit donc une surface mais dont le contour reste bien un cercle ! J'ai expliqué que pour les différencier, on appelle le cercle plein, un disque en mathématiques…mais que pour les polygones, il n'y a pas de mots différents pour expliciter s'il est plein ou vide et que c'est la situation concrète ou bien l'énoncé de l'exercice qui permet de le déterminer.

Ici, j'ai suscité l'évocation de liens de différence "vide/plein" entre des exemples concrets (P1) puis l'évocation des liens de similitude entre un exemple concret et la figure abstraite de géométrie pour chaque cas, afin d'amener une compréhension des notions de périmètre et d'aire et d'en faire évoquer les différences sur les figures mathématiques représentées en paramètre 2.

Un élève a convenu que « c'est un carré déjà un peu spécial car il est plein » et toute la classe a validé que pour appliquer la définition, il fallait un carré **plein**.

Cette propriété concrète qui avait été éludée par un grand nombre d'élèves serait-elle un obstacle épistémologique à la construction de la notion d'aire ? Il faut effectivement faire émerger cette variable pour que la notion de surface ait un sens !

Les carrés évoqués et dessinés selon la définition mathématique sont imaginés vides par omission par les élèves car on ne décrit pas l'intérieur . Il est même probable que pour que les diagonales existent en tant que traits, ce carré soit forcément vide !

J'ai proposé aux élèves de le faire exister dans leur tête et de se sentir passer la main sur la surface emprisonnée à l'intérieur ou bien de se sentir en train de la peindre de leur couleur préférée.

Recherche d'évocations concrètes afin de susciter un « vécu de sens» . Prise par le temps que je voyais défiler, je n'ai pas fait de mini dialogue pédagogique pour faire prendre conscience aux élèves de leurs évocations ….

Puis je les ai alors questionnés sur : « Qu'est-ce qu'un cm^2 ? » .
Un élève m'a répondu : « C'est la surface à l'intérieur du carré », alors je lui ai proposé d'évoquer un CD dans sa tête et de passer la main sur cette surface…et je lui ai demandé si cette surface, c'est aussi 1 cm^2 ?

J'ai demandé à l'élève comment on pourrait mesurer alors la surface de ce CD ?

L'élève a bien expliqué qu'il allait recouvrir la surface du CD avec des carrés de 1 cm^2 puis qu'il compterait combien il y en a. J'ai explicité alors qu'il allait compter un nombre de " 1 cm^2" en tant qu 'unité concrète, et que ce nombre représenterait l'aire du CD en unité cm^2 et qu'on pourrait écrire $\mathscr{A} = 6\ cm^2$.

Retour au évocations concrètes (P1) et lien P3 d'analogie de similitude sur ce P1. Mise en place du code symbolique (P2 sur le P1) par l'écriture du résultat. Ici, la difficulté pour l'élève est de comprendre que le « 1 cm^2 » devient un contenant , un objet à part entière, dont on va pouvoir répéter l'usage. Pour certains élèves, très faibles, je pense qu'il faudrait pratiquer la mosaïque puis l'évoquer pour qu'ils construisent dans leur tête l'unité en tant qu'objet défini et figé.

J'ai ajouté à l'oral « un centimètre carré c'est exactement la mesure de la surface emprisonnée dans un carré de 1 centimètre de côté » et cela va me servir d'unité pour mesurer toute sorte de surface !

Pour calculer des aires en mathématiques, on fait de la mosaïque comme les anciens autrefois ….

3. Le centimètre carré dans une ligne courbe :

Puis j'ai fermé le tableau et eux leur cahier puis je leur ai demandé de faire exister une surface d'aire mesurant 1 cm^2 dans leur tête…puis s'il était possible de faire exister cette même quantité de surface mais sans carré ! Certains ont dit oui et j'ai donc proposé ce travail à toute la classe mai sur papier millimétré afin que la mesure soit exacte. Je ne leur en ai pas dit plus et j'ai laissé les élèves confrontés à leur feuille de papier millimétré.

Je passais dans les rangs. A ceux qui ne démarraient pas, j'ai demandé de me représenter une surface de 1 cm^2 sur la feuille de papier millimétré et de se souvenir que l'exercice qui était à faire pour ce jour…..la plupart ont décomposé la figure en petits carrés assemblés, chacun représentant un quart de cm^2.

Cette heure de cours se terminait….les élèves avaient 45 minutes pour déjeuner, ils avaient un cours d'Anglais puis à nouveau Maths. J'avais ramassé leur production sur papier millimétré.

Je les ai accueillis en leur demandant de faire exister dans leur tête ce qu'ils avaient découvert le matin…. je leur ai demandé de représenter à nouveau une figure de surface mesurant 1 cm^2 mais avec des figures comportant obligatoirement des lignes courbes puis sur une autre bande de papier millimétré, une figure de surface mesurant trois cm^2 avec des figures comportant des lignes droites et aussi des lignes courbes.

Ce fut un moment de création intense pour les élèves.

J'ai ramassé leurs productions, certains figures sont d'une complexité incroyable et prouvent que les élèves ont réussi à se dégager de l'emprise de la figure du carré pour représenter une surface exprimée en 1 cm^2. (Annexe 4)

J'ai choisi ensuite de travailler sur une activité de coloriage permettant de trouver un encadrement de la mesure de l'aire d'un disque, figure dont la formule de l'aire n'avait pas été étudiée en primaire, afin d'ancrer l'objet cm^2 .

Ce que j'ai compris :

La notion d'unité , quelle qu'elle soit, doit être construite comme un objet étalon, indépendant, qu'on répète pour donner une mesure qui exprime le nombre de fois qu'on a répété l'unité…

Ceci n'est pas ancré en vécu de sens chez les élèves qui ne retiennent que les formules en P2 sans y mettre de sens et cherchent à les appliquer sans compréhension et font des calculs incohérents avec les nombres donnés quand on leur demande un calcul de périmètre ou d'aire.

Des liens de comparaison peuvent être faits avec la mosaïque, des liens inédits (P4) pourraient aussi être suscités chez les élèves….

Ces notions sont abordées en primaire et il est donc nécessaire de commencer par vérifier leurs représentations et le sens qu'ils donnent à ces notions. Seuls 6 élèves sur 27 avaient la bonne représentation. Les mesures de surface offrent une opportunité très riche de redécouvrir la notion d'unité. Le calcul de périmètre l'est beaucoup moins car la mesure de longueur est très ancrée dans le quotidien.

Investir sur la compréhension de l'unité d'aire permettra de gagner du temps sur celle de l'unité de volume qui arrive plus tard dans le programme.

J'ai été frappée de constater la force des formules retenues par cœur sans sens, pour des figures particulières, que les élèves cherchent à tout prix à utiliser.

Ceci conforte la nécessité de partir de la notion générale (figure de forme quelconque, voire non académique : la patate) avant d'aller aux cas particuliers (disque, rectangle et carré) puis de réinvestir des figures de forme plus générale dans lesquelles on va retrouver des figures particulières pour mener des calculs exacts de mesures de surface.

Il doit se constituer un lien de sens étroit entre la formule et la notion à laquelle elle se rapporte. Ce n'est que dans un deuxième temps que la formule pourra « vivre mentalement seule » et être utilisée à bon escient.

CONCLUSION

Le travail d'expérimentation, de ré-flexion et de synthèse auquel m'a conduit la rédaction de cette problématique m'a vraiment permis de prendre conscience de la puissance du concept de l'évocation. Il me semble avoir enfin identifié un réel point d'appui pour aider mes élèves, par le dialogue pédagogique, à découvrir "*l'intelligence de leurs moyens pour déployer les moyens de leur intelligence."* [31]

En effet, la nature de l'évocation, bien que constitutive de l'individu, peut être enrichie en fonction des spécificités de la tâche à réussir, elle est aussi la matière première de tout acte de connaissance dont la pédagogie peut être enseignée et entrainée au même titre que tout geste physique.

"Le mental de l'être humain est toujours adaptable; le recensement opéré concerne les habitudes mentales, donc relatives, qui laissent le champ libre aux initiatives de changement, de progrès, d'extension."

"En pédagogie, il faut commencer par le commencement, c'est-à-dire qu'il faut prendre ceux que l'on a pour mission d'aider à se former là où ils en sont et selon ce qu'ils font."[32]

Le profond respect de la personne humaine et l'indéfectible confiance en ses capacités de changement que porte intrinsèquement la Gestion Mentale rejoint la joie que je ressens à être "auprès des êtres".

Le témoignage de certains élèves , la joie avec laquelle chacun manifeste "son eurêka", a été pour moi la preuve de l'efficacité de la théorie d'Antoine de La Garanderie

Par ailleurs, la lecture des obstacles épistémologiques des objets et des démarches mathématiques au regard de la Gestion Mentale ont considérablement enrichi mes compétences didactiques.

Je me sens donc aujourd'hui pleinement redevable envers mes élèves de susciter cette découverte, en eux et par eux, afin qu'ils deviennent des pédagogues à l'égard d'eux mêmes et vis-à-vis de leurs camarades.

Ceci nécessite une profonde transformation de mes pratiques pédagogiques, ce qui est un projet passionnant ! En ce sens, il me semble nécessaire d'éveiller les élèves à la nature de leurs évocations et à la pratique du geste d'attention sur des exercices non scolaires dès le début de l'année.

Il faut avoir l'audace de perdre quelques séances de cours pour mener ensuite plus sereinement des dialogues pédagogiques qui profiteront à la classe entière et ainsi gagner en efficacité d'apprentissage.

Je puis témoigner qu'aujourd'hui, je rentre en classe avec une grande disponibilité à l'autre et au temps présent dans l'attente de recueillir chaque étincelle de génie de mes élèves, ce qui m'apporte joie, sérénité et confiance !

Ainsi, comme le dit si bien Antoine de La Garanderie :

"l'élève est celui que le maître "élève" et "qui "s'élève" à son contact."

L'aventure ne fait donc que commencer !

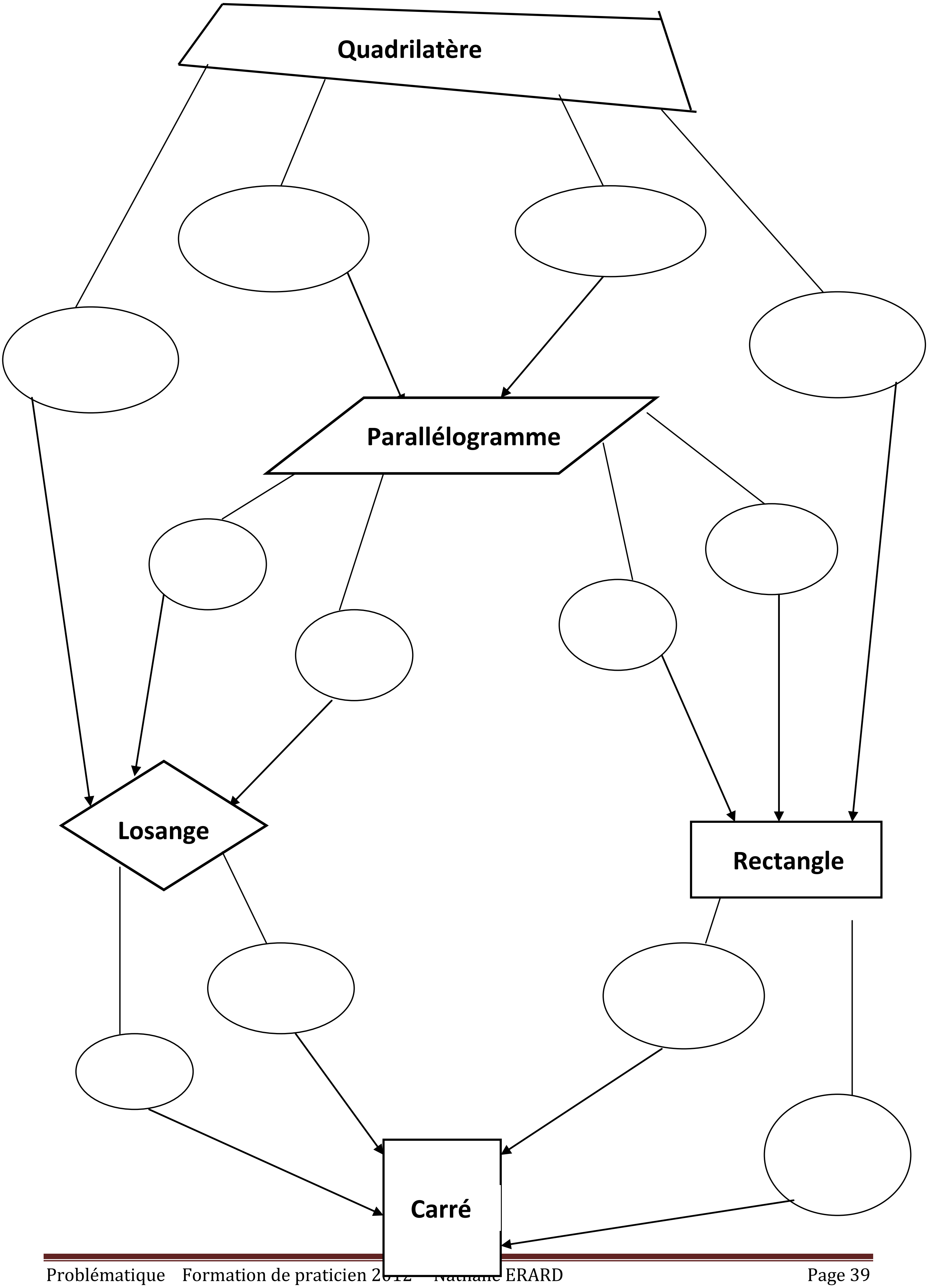
[31] Antoine de La Garanderie, cité par Armelle Géninet en stage de mathématiques 2

[32] Antoine de La Garanderie, Comprendre et Imaginer, p 124 et p 131

ANNEXES :

1. Exemples d'un schéma de synthèse sur les quadrilatères
2. Contrat de début d'année
3. Article sur l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique
4. Figures ayant pour aire 3 cm^2 construites par les élèves

Annexe 1 : Schéma de synthèse sur les quadrilatères



Annexe 2 : Contrat de début d'année

<u>Travail Personnel :</u>

Ta réussite dépendra de ton attitude en classe, de la régularité et de la qualité de ton travail qui doit être effectué dans le calme (pas de télé allumée, téléphone portable éteint).

A la maison, le soir même du jour du cours de Maths, il faut, <u>sans regarder ton cahier,</u> essayer de <u>faire revenir dans ta tête ce que tu as retenu du cours</u>, tu l'écris et puis tu complètes, en rouge, ce qui manque.

<u>Avant</u> de faire les exercices demandés, il faut <u>apprendre par cœur ce qui est en rouge dans le cahier de cours. Tu dois refaire les exemples du cours en les rédigeant sur une feuille à part, cahier de cours fermé, afin de vérifier que tu as compris la méthode et que tu sais l' appliquer.</u>

Imagine toi, assis(e) à ta place au collège, en interro ou en face du professeur qui t'interroge.

<u>Récite toi dans ta tête les étapes de la méthode à retenir dans le projet de la réutiliser en contrôle.</u>

<u>Puis seulement après</u>, rédige les exercices demandés en s'appuyant aussi sur ceux déjà corrigés en classe (correction prise en vert dans le cahier classeur).

Le week-end, <u>réactive le cours depuis le début du chapitre</u> puis refais les exercices faits faux durant la semaine pour vérifier que tu as bien compris et afin de te préparer au contrôle.

Entraine toi sur Labomep, qui fournit des exercices interactifs corrigés. Ce logiciel est accessible à partir du site du collège ou sur www.labomep.net.

En géométrie, la boîte à outils te permettra de réviser les définitions et propriétés et elle te sera utile dans la recherche d'une démonstration. Elle ne sera pas autorisée en contrôle. Elle doit rester chez toi.

<u>Travaux notés :</u> Chaque rubrique sera affectée d'un coefficient différent pour donner une moyenne

- **Interrogation (coeff 3) :** Courte et surprise, une par chapitre pour vérifier l'apprentissage régulier du cours.

- **Contrôle (coeff 6) :** Devoir d'une heure, toutes les trois semaines, prévu à dates fixes….porte sur tous les chapitres étudiés depuis le début de l'année. La correction sera faite par l'élève qui devra identifier la nature de ses erreurs et rédiger les exercices faits faux, en entier, au stylo vert , à la fin de sa copie. La copie corrigée et signée par les parents sera relue par le professeur afin de vérifier que l'élève a compris ses erreurs.

- **Devoir à la maison (coeff 1)** : Travail à rédiger sur copie double en soignant la présentation. L'élève doit rendre le devoir à la date demandée sinon il pourrait avoir zéro.

- **Exercices (coeff 1) :** A chaque séance, je ramasserai, de façon aléatoire, les feuilles d'exercices depuis le début du chapitre et je noterai la qualité de la correction et de la rédaction personnelle. Ces notes figureront dans la rubrique devoir maison sur le bulletin.

- **Labomep (coeff 1) :** Une note d'assiduité par trimestre selon la persévérance observée.

Signature de l'élève : Signature des parents :

<u>Adresses internet pour s'entrainer en s'amusant :</u>

1. Matoumatheux : http://matoumatheux.ac-rennes.fr
2. Pour télécharger le logiciel Déclic de tracé géométrique : http://emmanuel.ostenne.free.fr/declic/zipfiles/setup.exe ou tu peux aussi télécharger Géogébra
3. Fédération française des jeux mathématiques : www.ffjm.org

Annexe 3 : article sur l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique

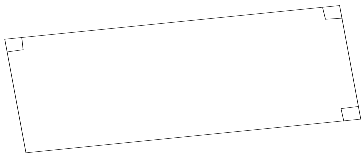
Des objets mathématiques dynamiques.

Professeur de mathématiques en collège, et formée à la gestion mentale, Nathalie ERARD travaille en classe avec des logiciels spécifiques en géométrie.

Tout logiciel de géométrie dynamique permet d'une part de construire une figure avec des propriétés données et d'autre part de mettre cette figure en mouvement en déplaçant des points qui sont mobiles. Certains points sont définis par rapport à d'autres et ne se déplaceront donc qu'en lien avec ces derniers. Les données définies à la construction de la figure seront conservées lors du déplacement.

Des dessins de géométrie dynamiques pour enrichir les évoqués d'une figure mathématique.

Le dessin Déclic est construit avec les données caractéristiques qui définissent la figure mathématique. Ces données caractéristiques sont, le plus souvent et quand c'est possible, codées par un symbole. Par exemple, un rectangle est un quadrilatère quelconque qui a 3 angles droits :



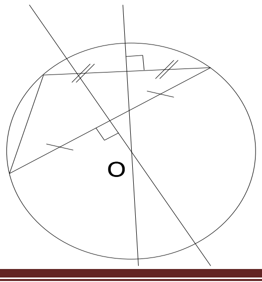
Avec la souris, l'élève peut déformer, agrandir, réduire, faire tourner ce dessin qui, quoi que l'élève fasse, conservera ses propriétés caractéristiques définies à la construction.

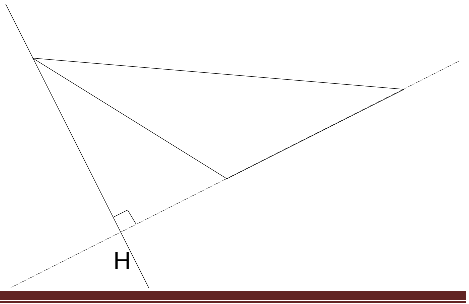
La construction du dessin et la répétition du déplacement de ce dessin par l'élève, actif à la souris, lui offre l'occasion de fixer des images mentales mobiles de ce qui doit prendre, dans sa tête, le statut de figure géométrique de base. La multiplicité des dessins offerts, qui conservent néanmoins leurs propriétés intrinsèques, facilite le passage à l'abstraction que demande la compréhension d'une définition ou d'une propriété. Citons la propriété sous-jacente à cette figure:

" Si un quadrilatère quelconque a au moins trois angles droits alors c'est rectangle ".

Chaque profil pédagogique peut trouver son compte dans l'usage du déplacement d'une figure donnée avec un logiciel de géométrie dynamique : l'un se racontera la constance des caractéristiques de départ, l'autre la visualisera, le troisième la ressentira directement par le mouvement de la souris.

Cette possibilité d'animation permet aussi d'étudier une configuration de façon plus complète, d'entrevoir de nombreux cas possibles, notamment les cas particuliers ainsi que les cas extrêmes. Un exemple frappant pour les élèves est la position du centre du cercle circonscrit à un triangle. Ce point est le point d'intersection des trois médiatrices des côtés du triangle et il se trouve à l'extérieur du triangle si celui – ci possède un angle obtus. Il en est de même pour l'orthocentre d'un triangle. La visualisation du déplacement de ces points remarquables est déterminante dans l'image mentale complète et générale qu'un élève de collège garde d'une configuration géométrique donnée. Avant d'être confronté à une construction papier-crayon, l'élève a déjà pu visualiser l'ensemble des cas possibles et ne se laissera pas déstabiliser par une hauteur à tracer à l'extérieur d'un triangle par exemple. (figures Déclic jointes : cercle circonscrit et hauteur d'un triangle).





Un logiciel de géométrie dynamique pour s'ouvrir à la démonstration.

Dès l'entrée en sixième, l'utilisation du logiciel de géométrie dynamique* s'avère très riche. En effet, le passage de l'école primaire au collège demande aux élèves un changement d'approche en géométrie.
Les propriétés géométriques d'une figure ne doivent plus être perceptivement lues ou vérifiées à l'aide des instruments de géométrie sur un dessin particulier mais établies soit comme hypothèses de départ appelées les données de la figure ou bien démontrées à partir de ces données. Un élève de CM2 regardant un dessin et observant que deux droites ont la même direction affirmera d'emblée que ces deux droites sont parallèles et qu'il en est certain.
Un élève de sixième observera que ces deux droites semblent être parallèles et il cherchera à le prouver par une démonstration mathématique.

Ici encore, les élèves doivent apprendre à distinguer les propriétés géométriques de la figure mathématique de celles d'un dessin particulier. Avec le logiciel de géométrie dynamique, les premières sont conservées lors du déplacement de la figure mais pas les secondes !
Le critère implicite pour décider qu'une figure répond à une description géométrique donnée est que toutes les propriétés géométriques de la description sont confirmées par le déplacement de n'importe quel point de la figure avec le logiciel de géométrie dynamique.

On conviendra alors que cette propriété peut être codée par un symbole donné, s' il existe. Le codage d'un dessin certifie alors la validité de ses caractéristiques et lui donne le statut de figure géométrique. Le mathématicien s' autorise alors à tracer des figures à main levée mais codées !

Par exemple, pour un élève de CM2, deux droites perpendiculaires à une même droite, sont parallèles, cela est évident car cela se voit sur le dessin. En sixième, les deux droites seront considérées comme effectivement perpendiculaires à une même troisième seulement si la figure est codée avec le symbole des angles droits et ensuite, il faudra démontrer qu'elles sont bien parallèles à l'aide d'une propriété mathématique qui aura été établie en classe et que l'élève devra citer explicitement pour prouver ce résultat.

De même, en sixième, pour affirmer que trois points sont alignés, il faut calculer et non mesurer l'angle qu'ils forment et prouver que cet angle mesure exactement 180°. Un élève de CM2 prend sa règle et vérifie empiriquement qu'il peut faire passer une droite par ces trois points !
Ici encore le logiciel de géométrie dynamique permet de mesurer un angle et de montrer à l'élève les limites de notre œil qui ne nous permet pas de différencier des mesures d'angles à 2 degrés près or un angle plat mesure exactement 180, 000000° d'un point de vue mathématique!

Par conséquent en sixième, tout résultat observé sur un dessin s'énonce par la précaution d'usage : " il semble que...." et implique une démonstration en bonne et due forme pour être prouvé.

Cette étape de la déduction par la preuve est fondamentale au collège. Dès la sixième, chaque élève doit en comprendre le fondement pour apprendre à construire un raisonnement déductif à partir des données codées d'une figure ou d'un énoncé. Or, cette démarche nécessite de modifier les pratiques empiriques d'observation, avec ou sans instruments, acquises à l'école primaire.

Par ses fonctionnalités de déplacement de points et de mesure de grandeurs, le logiciel de géométrie dynamique permet de mettre en défaut la perception d'un dessin par un élève et favorise l'acquisition du langage mathématique et de la démarche de preuve.

« Aujourd'hui, je n'envisage plus de tracer une figure de géométrie sans l'animer. J'encourage mes élèves à faire leurs constructions sur Déclic* afin d'élaborer une image mentale juste des figures géométriques de base à acquérir au collège. La limite du logiciel étant parfois la difficulté à coder aisément toutes les données, ce qui met pourtant sur la piste de la démonstration ... » Nathalie ERARD – 2010

* Pour télécharger le logiciel Déclic, il suffit de taper dans Google: " déclic, Emmanuel Ostenne", le logiciel est gratuit et sa prise en main est très simple.

Bibliographie : Un travail de recherche a été mené par Sophie Soury-Lavergne de l'INRP de Grenoble, qui propose des activités sur le logiciel Cabri.

<u>Remarques :</u>

J'ai écrit cet article fin 2010 et je voudrais apporter quelques compléments .

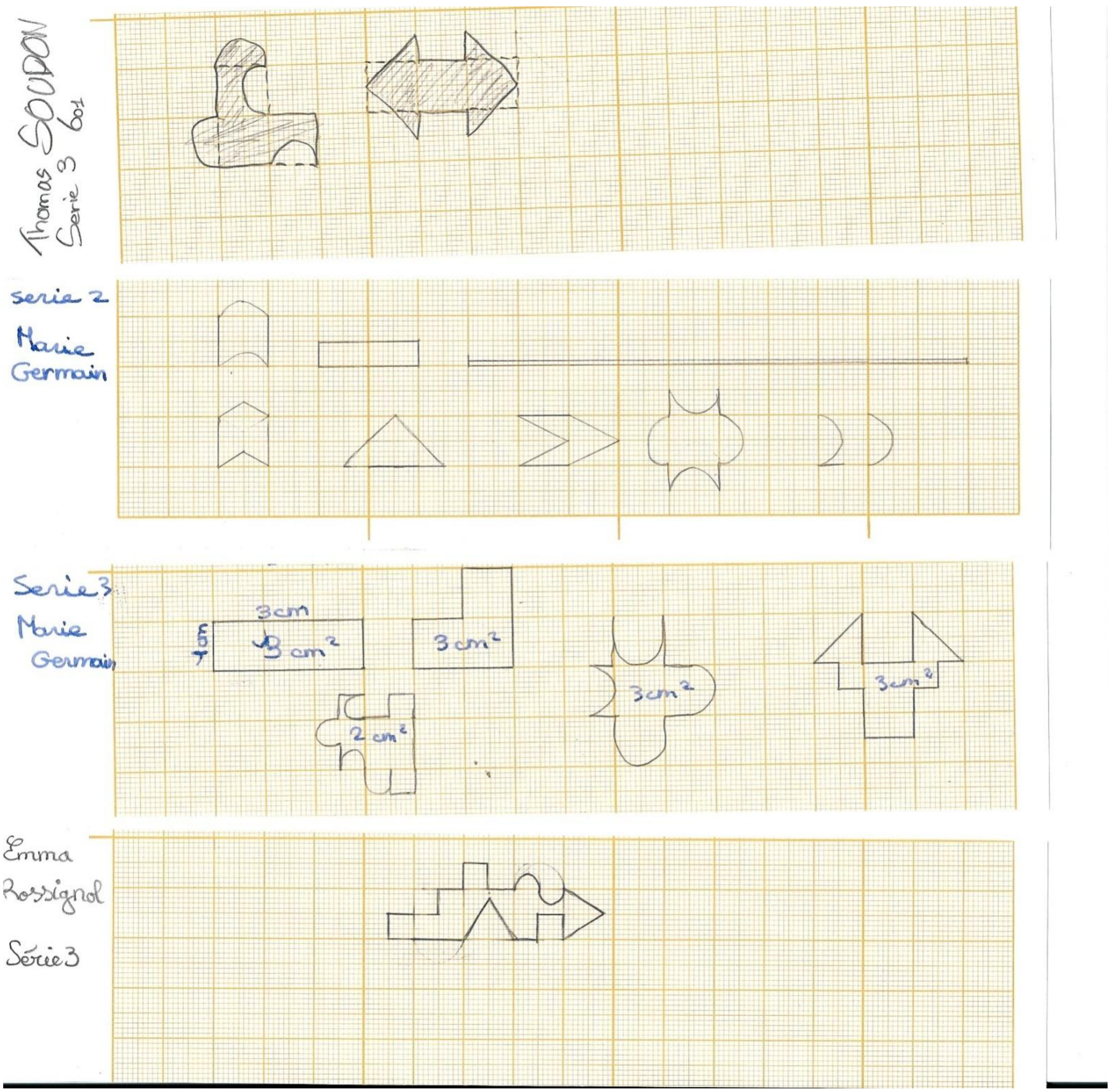
L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet de généraliser une figure à toutes les positions possibles et de confirmer le résultat pour chacune. Il apporte donc la preuve expérimentale d'un théorème ce qui est très convaincant pour les élèves, même si cette preuve n'en n'est pas une pour le mathématicien !

Par le déplacement des points et les déformations successives du dessin , l'élève comprend le sens de la figure mathématique qui n'est pas un dessin figé en paramètre 2 mais un ensemble de relations reliant des objets entre eux, à évoquer en paramètre 3 et dans la mobilité.

Il est absolument indispensable que l'élève ne se contente pas d'observer le spectacle mais qu'il soit actif mentalement pour constituer des évoqués.
Pour que cet outillage externe porte ses fruits, il faut que l'enseignant mette l'élève en projet de revoir ou de se redire dans sa tête ce qui va lui être montré. Il doit pratiquer des pauses évocatives hors perception et mener des dialogues pédagogiques pour expliciter la nature des évoqués de l'élève.

Ainsi utilisé, cet outil permet de construire des évoqués dynamiques, porteurs de liens en paramètre trois, qui si ils sont mémorisés, pourront nourrir les gestes de compréhension , de réflexion, d'imagination reproductrice mais aussi créatrice car l'élève pourra s'autoriser à faire bouger ses évoqués de figures dans sa tête.

Annexe 4 : Des cm^2 dans des lignes courbes :



BIBLIOGRAPHIE

ANTOINE DE LA GARANDERIE :

Editions : Le Centurion, Bayard

Les Profils Pédagogiques - 1980 : Discerner les aptitudes scolaires

Pédagogie des moyens d'apprendre -1982

Le Dialogue Pédagogique avec l'élève-1984

Comprendre et Imaginer-1987

Critique de la raison pédagogique -1998

Editions Chronique Sociale

Une pédagogie de l'entraide, troisième édition-1974-1994

Plaisir de connaitre, Bonheur d'être , une pédagogie de l'accompagnement-2004

Armelle Géninet :

Gestion mentale en mathématiques, Applications de la sixième à la seconde, Paris Retz, 1993

Jean-Pierre Gaté, Armelle Géninet, Michèle Giraoul, Thierry de la Grararanderie :

Vocabulaire de la gestion mentale, éditions Chronique Sociale, 2009