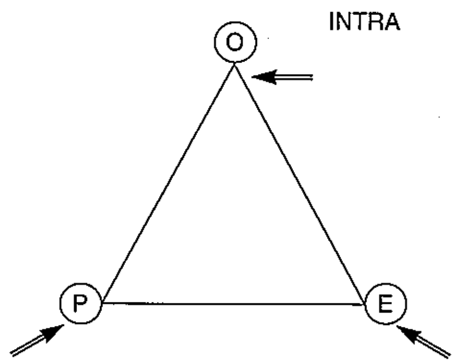
Armelle Géninet

Auteur de La Gestion mentale en mathématiques *(Retz)*
Formatrice en gestion mentale

Épistémologie et gestion mentale

Les différents courants pédagogiques s'accordent actuellement pour dire que les difficultés d'apprentissage tiennent moins aux trois pôles du « triangle pédagogique » (Élève, Professeur et Objet d'enseignement) qu'aux interactions entre eux. Cette analyse « *inter* » resterait sinon superficielle, du moins largement insuffisante, si on ne la faisait précéder d'une observation minutieuse, « phénoménologique », de chacun des trois acteurs de la situation didactique.



En levant le voile sur ce qui passe dans la tête de l'élève en situation d'apprentissage, la gestion mentale nous donne les moyens d'une analyse « *intra* » tout à fait intéressante et originale. Elle décrit précisément les « lois de la vie mentale ». Elle nous fait découvrir que chacun, élève et enseignant, a *ses* habitudes évocatives, *ses* structures personnelles de projet de sens.

Il est une dimension de la recherche encore trop peu développée, elle est signalée avec force par Dupin et Joshua, comme par G. Vergnaud ou R. Brissiaud dans la didactique des sciences. Faisant en particulier référence aux travaux de Vygotsky, ils signalent l'importance d'une analyse épistémologique des objets d'enseignement : analyse « *intra* » des choix historiques, des outils didactiques comme des supports. Ici encore, la gestion mentale permet l'accès à une dimension supérieure :

Quelles sont les structures épistémologiques de ces choix, outils, supports et quelles en sont les incidences sur la gestion mentale de l'apprenant ?

Qu'est-ce que l'approche de tel concept, aussi bien dans le fond que dans la forme, nécessite en termes de stratégies mentales ?

– Qu'est-ce qui, dans la nature même du concept, peut faire obstacle à la démarche d'un élève ?

– En quoi, par exemple, la nature déductive du raisonnement mathématique ou le choix d'une approche inductive dans l'enseignement actuel des langues constituent-ils des « obstacles épistémologiques » tels que les a définis Vygotski ?

– Comment la présentation linéaire d'une table de multiplication constitue-t-elle pour beaucoup trop d'élèves un obstacle à leur mémorisation ?

– Quelles sont les adaptations possibles ou les incompatibilités structurelles de leurs habitudes mentales avec ces objets d'étude ?

Autant de questions qu'il est intéressant de se poser sous l'éclairage de la gestion mentale si l'on veut créer des outils didactiques qui soient de véritables « instruments psychologiques » d'aide au développement des élèves.

La gestion mentale peut grandement élargir le champ d'investigation de toute recherche didactique.

Les programmes de mathématiques du collège prévoient une initiation à la démonstration dès la classe de 5e. Dans les faits, la démonstration ne fait pas explicitement l'objet d'un enseignement. L'enseignant montre un certain nombre d'exemples, demande à ses élèves de reproduire ces modèles et évalue les productions individuelles en pointant alors acquisition ou non-acquisition de l'activité mathématique.

L'analyse des difficultés exprimées par les élèves ou relatées par leurs enseignants, sous l'éclairage de la gestion mentale, permet à l'enseignant de faire des choix pédagogiques susceptibles de faciliter l'accès au raisonnement déductif.

Le travail qui va être exposé propose un repérage des principaux obstacles, une analyse épistémologique des difficultés d'apprentissage, et une panoplie d'outils didactiques expérimentés depuis plusieurs années avec succès dans les classes de 4e et 3e, et utilisables dès la classe de 5e.

Apprentissage du raisonnement déductif en géométrie

Difficultés en termes de gestion mentale

Réfléchir dans un problème de géométrie

Dans un problème de géométrie, l'élève va synthétiser toutes les données du problème dans un dessin. Celui-ci, par sa nature spatiale, va envahir tout son champ mental. Dans le dessin, il y a tout : les données, les hypothèses, les éléments qui apparaissent à partir de ces données, les conséquences des hypothèses, les conclusions.

Il est malaisé pour l'élève de faire la différence entre ce qui lui est donné (les certitudes contenues dans le texte ou dans les symboles sur la figure de géométrie) ou ce qu'il a découvert d'une part, et les conjectures, les suppositions qu'il peut faire et qu'il sera amené à démontrer d'autre part. Il est face à une globalité, un espace qui contient tout ! De cet espace global, il va devoir extraire des espaces, séparer des indices, ce qui suppose un travail mental important, difficile pour beaucoup.

Il doit :

– extraire de l'ensemble de son dessin un ou plusieurs indices de façon à les mettre en relation avec ses évocations (visuelles ou verbales) des théorèmes appris. Il doit séparer des indices contenus à la fois dans les données, la figure et les questions posées. C'est un travail d'analyse qui consiste à partir soit de la globalité du dessin pour revenir aux éléments de l'énoncé, soit des éléments de l'énoncé pour aller à la globalité du dessin ;

– faire la différence entre ses certitudes, contenues dans les « hypothèses » (paradoxe du vocabulaire), et ses découvertes sur le dessin qui ne peuvent être que des **conjectures** et devront être *vérifiées*, *prouvées*, les preuves à utiliser étant les théorèmes et lois mathématiques.

Prégnance du projet de résolution

Dans un texte, il y a des données et des questions. Les données, pour une majorité des élèves, ne servent qu'à faire la figure. Une fois que le dessin est fait, les données sont en quelque sorte éliminées, les mots n'existent plus. Les élèves en difficulté, sachant qu'il y a quelque chose à résoudre, n'évoqueront que la question posée.

Les nombreux dialogues pédagogiques menés avec des élèves en difficulté aussi bien de collège que de lycée me permettent d'affirmer que le travail évocatif sur un énoncé de problème de géométrie porte beaucoup plus sur les questions posées que sur les données du problème. Ces élèves sont en majorité envahis par un projet dominant de résoudre le problème, de répondre à la question posée. L'activité mentale est tellement tendue vers le but à atteindre qu'elle néglige le point de départ du chemin à créer. Or, sans cette origine, comment s'inventer un itinéraire ?

Manque de retour en arrière

Le « jeu » d'un problème de géométrie, véritable jeu de construction où les questions s'enchaînent de façon *linéaire* (une question en entraîne une autre, qui elle-même en fait surgir une troisième), nécessite un continuel va-et-vient entre ce qui vient d'être démontré et ce qui était déjà connu. Il s'agit de replacer toute nouvelle découverte à l'intérieur de l'ensemble des éléments connus et de créer à chaque fois de nouveaux liens dans des *globalités* successives à réorganiser sans cesse.

Les bons élèves en mathématiques sont en interrogation permanente par rapport à ce qu'ils apprennent :

- Qu'est-ce qu'on me donne ? Qu'est-ce qu'on me demande ? (présent)
- Qu'est-ce que j'ai appris à ce sujet ? (passé)
- Quelle est l'idée du professeur ? À quoi puis-je m'attendre ? (futur)

Ils sont vraiment dans le passé de leurs acquis, dans le présent de ce qu'on leur donne, mais également dans le futur de ce qu'ils vont avoir à faire, en anticipation constante des problèmes posés.

Les élèves qui échouent sont uniquement dans le présent de la globalité spatiale ou continuellement dans le futur de ce qu'il y a à faire. Ils sont figés dans leur activité mentale. À cela s'ajoute la difficulté à *trouver le « bon théorème »*.

Trouver le « bon théorème »

Le théorème clé ne sera mis instantanément à disposition que si, au moment de son installation en bibliothèque mentale, l'élève s'est donné des indices spécifiques, facilement identifiables pour le retrouver, indices à prendre à la fois dans le « **si** » des éléments connus décrits par l'énoncé et dans le « **alors** » des questions posées. Cela suppose que l'élève se soit alors posé les questions :

- *Quand l'utiliser ?* et *Pour prouver quoi ?*

La réflexion se prépare dès la mémorisation

Des difficultés en géométrie sont très souvent attribuées un peu hâtivement à la réflexion, alors qu'elles se situent bien en amont. Elles sont le symptôme, manifesté au moment de la réflexion, d'une insuffisance du projet mental de mémorisation. L'élève ne peut retrouver un théorème qu'en fonction de ce qu'il a implicitement prévu de retrouver, dans les conditions où il a imaginé le retrouver, et pour l'utilisation qu'il a programmée. Si des difficultés surgissent en démonstration, il y a toujours une question à poser :

Comment apprenez-vous un théorème ?

Apprendre un théorème est un geste mental qui mérite d'être décrit et entraîné en classe. On n'apprend pas un théorème comme on apprend une leçon d'histoire ou de biologie. Chaque matière a des exigences spécifiques de mémorisation qu'il est indispensable de clarifier. L'enseignant doit clairement les énoncer.

La mise en relation d'un problème et d'un théorème ne peut être rapide, efficace, que si elle a été préparée au moment même de l'apprentissage du théorème.

Réhabiliter la mémorisation

La compréhension en mathématiques, valorisée à juste titre par les élèves et leurs parents, l'est actuellement au détriment de la mémorisation.

Il convient donc de réhabiliter une mémorisation élargie au service de la compréhension des mathématiques. Comprendre se situe « ici et maintenant », mémoriser c'est s'approprier le présent en faisant des liens avec d'autres acquis du passé tout en se projetant dans le futur d'une réutilisation « ailleurs et plus tard ».

Mémoriser, c'est mettre du temps dans son apprentissage.

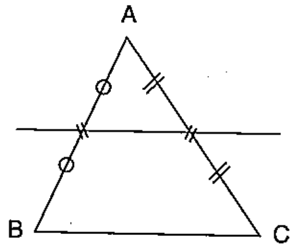
Mettre du temps dans l'espace

Dans la mesure où un théorème de géométrie correspond toujours à une représentation spatiale, une grande majorité des élèves ont en mémoire une image visuelle (P2) plus ou moins précise sur un théorème. Cette image visuelle porte en elle, par nature, la globalité d'une situation géométrique mettant en évidence la *simultanéité de plusieurs phénomènes* (l'identification du théorème à cette situation globale masque l'enchaînement logique du « **si..., alors...** »), donc la *temporalité* de la proposition mathématique.

Similitude de plusieurs théorèmes

Une même image mentale visuelle peut, de plus, surgir à propos de plusieurs théorèmes différents. C'est le cas en 4e des théorèmes concernant la « droite des milieux d'un triangle ». C'est systématiquement le cas d'un théorème et de sa réciproque. Il ne faut pas s'étonner alors de la difficulté de différenciation de l'un par rapport à l'autre. L'accès à la démonstration, c'est-à-dire au sens du raisonnement déductif, nécessite le codage de la

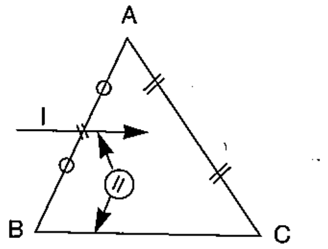
CARTE D'IDENTITÉ D'UN THÉORÈME



Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un 2ᵉ côté, passe aussi par le milieu du 3ᵉ côté

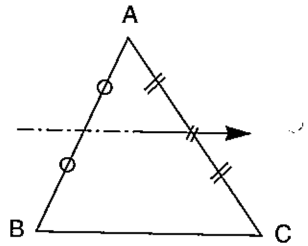
ORIGINE
Projection du milieu d'un segment

QUAND l'utiliser



Chaque fois que j'aurai dans un triangle 1 milieu et parallèle

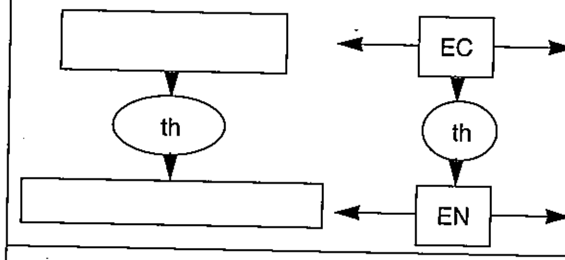
POUR prouver QUOI



Milieu d'un segment
distances égales

COMMENT FAIRE ?

Organigramme



Rédaction

Par hypothèse on a :
I = m [AB] et △ // (BC)

Or : « - - - - - - - - - - - »

Par conséquent :
= m [ ]

DANS QUELS CONTEXTES ?
* parallélogrammes,
* diamètre d'un cercle,
* médianes, médiatrices.

A. GÉNINET

temporalité d'une proposition logique, du « **si**..., « **alors**... » du théorème. Cet apprentissage est long, difficile à mener dès la classe de 5ᵉ.

Il convient d'aider les élèves à faire évoluer leurs représentations d'un théorème, à développer leur compréhension spatio-temporelle et à élargir leurs projets de mémorisation en leur proposant des outils appropriés qui soient des instruments psychologiques d'aide au développement de leur pensée (Vygotsky).

Dans cet esprit, j'ai pu tester auprès des élèves de 4ᵉ l'efficacité de la « carte d'identité d'un théorème » (voir page ci-contre). Les très bons élèves ont réalisé et exprimé que c'était un travail qu'ils faisaient souvent implicitement, certains ont même trouvé que c'était un outil trop compliqué à rédiger : puisqu'ils avaient tout ça en tête, quel était l'intérêt de l'écrire ? Tous les autres l'ont vécu comme une dédramatisation de la démonstration. Utilisé au moment du cours en classe ou en travaux pratiques, cet outil leur a permis de prendre l'habitude de s'interroger sur ce qu'ils apprenaient, tout en les préparant à imaginer ce qu'ils pourraient en faire.

La suite de l'intervention est une description de cet outil à partir d'exemples, une analyse épistémologique des conséquences de son utilisation pour l'activité mentale des élèves et la présentation de nombreux travaux d'élèves.

Carte d'identité d'un théorème

Objectifs

- Comprendre la logique d'un théorème, d'une proposition logique.
- Pénétrer la linéarité du raisonnement déductif : le « si..., alors... ».
- Faire le pont entre :
  - le *présent* du théorème ;
  - le *passé* des acquis antérieurs qui seront par le fait même réactivés ;
  - le *futur* de son utilisation.
- Faire éclater les blocs culturels en faisant des liens entre plusieurs notions (y compris entre collège et lycée).
- Travailler :
  - l'imagination anticipatoire ;
  - l'analyse et la synthèse.
- Rendre l'élève actif, constructeur de son savoir mathématique en prenant l'habitude :
  - de se poser des questions sur ce qu'il apprend, en provoquant des temps de réorganisation de ses connaissances mathématiques ;
  - d'appréhender les concepts dans leur globalité.
- Inscrire chaque théorème dans une globalité.

Moyens

– Dresser une liste de tous les théorèmes appris depuis le début de l'année.
– Présenter une « carte d'identité » comme modèle et une grille vierge.
– En travaux de groupe, faire réaliser une carte pour chaque théorème, soit la même carte pour tous les groupes, soit une carte différente pour chacun d'eux. Faire suivre une synthèse avec communication des cartes aux autres groupes.
– Faire inventer un texte de problème pour illustrer le théorème.
– Faire mémoriser chaque carte sur la base d'images mentales aussi mixtes que possible (visuelles, verbales et kinesthésiques).

Pourquoi noter l'origine du théorème ?

– Pour remonter à « l'avant-théorème » et élargir le projet de compréhension, trop souvent limité au *« comment l'utiliser »* (projet d'application), en un projet d'explication du *« pourquoi il existe »*.

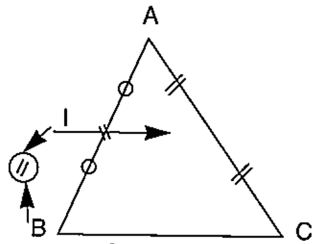
Il s'agit de remonter la chaîne déductive et de situer le théorème dans le passé des acquis précédents, mis à disposition pour une utilisation future plus large.

Ce retour en arrière rend service au visuel qui accède ainsi à la temporalité, et à l'auditif qui a trop souvent l'habitude d'avancer droit devant lui sans trop se retourner et à se perdre dans sa linéarité. La prise de conscience du pourquoi oblige ce dernier à un va-et-vient qui est pour lui la condition d'accès à une globalité.

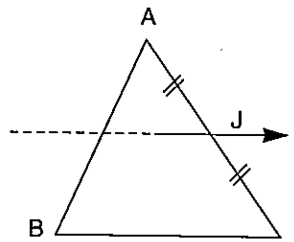
Quand l'utiliser ? Pour prouver quoi ?

Si ces questions ne sont pas posées au moment de la mémorisation du théorème, l'élève dira « je sais mes théorèmes, mais je ne sais pas les utiliser ». Il s'agit ici de classer une connaissance en mettant en évidence des indices qui permettront de le retrouver sans effort au milieu de beaucoup d'autres et de faire un choix rapide entre deux théorèmes très proches. S'il y a tant de confusion au collège entre l'utilisation d'un théorème et de sa réciproque, c'est justement parce qu'il n'y a pas eu séparation des deux états : état initial et état final, et surtout il n'y a pas eu cette **prise d'indices.**

Pourquoi deux dessins différents ?

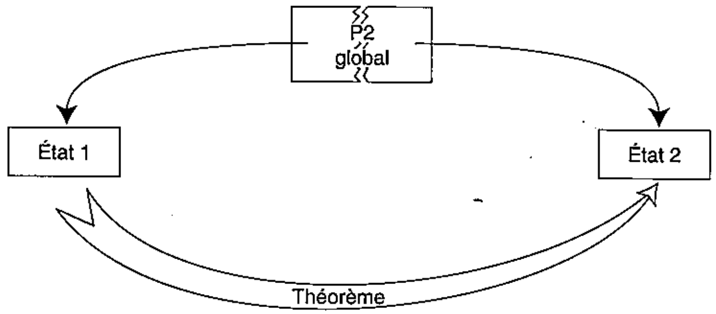


État initial



État final

– Permettre à l'élève qui mémorise un théorème sur la base d'une image visuelle globale en P2, contenant en simultané tous les éléments, à la fois l'hypothèse et la conclusion, de séparer celle-ci en deux images dont les différences lui permettront de coder deux états différents : **un état initial et un état final.**



Le théorème est le moyen de passer de l'état 1 à l'état 2 et de gérer la transformation. C'est mettre du temps dans son espace. La séparation de ces deux états permet de coder une transformation dans son espace mental, donc de le **temporaliser** et d'accéder ainsi à la linéarité de raisonnement déductif en repérant causes et conséquences, alors que la structure même de son évocation visuelle spatiale ne lui permettait pas de le faire.

Il pourra alors dépasser la difficulté souvent vécue de mettre les bons mots sur son image visuelle. Il aura codé un début et une fin.

– Permettre à celui qui se souvient de l'enchaînement des mots de mettre de l'espace dans son temps, en complétant sa verbalisation du théorème par deux images visuelles successives. Le préparer à accéder à la globalité spatiale d'une figure géométrique complexe en isolant certains éléments qui seront par le fait même plus faciles à repérer et à analyser. Ce travail, je le repète encore une fois, effectué au moment de l'apprentissage, prépare tous les élèves, quelle que soit leur dominante, à cette activité spécifique aux mathématiques d'effacement mental de certains éléments d'un dessin pour mettre en évidence une structure spatiale connue d'accueil du théorème. Extraire mentalement un élément d'un ensemble est difficile et mérite d'être entraîné.

Le codage mental de deux situations différentes et ordonnées pour un même dessin global, mêle judicieusement l'espace et le temps en mettant en place deux séquences. Celles-ci seront codées différemment par le visuel et l'auditif. Il faut ici noter l'intérêt de la kinesthésie pour l'un comme pour l'autre, le visuel peut coder un évoqué de mouvement pour passer de son état 1 à son état 2 ». Il met ainsi du temps dans son espace mental par le déroulement du mouvement.

– Christophe nous le décrit : « j'ai imaginé que ma main dessinait la droite et quand j'arrivais sur AC, je voyais apparaître les symboles d'égalités de longueur ».

– « J'ai fait la même chose, dit Anne-Sophie, mais moi c'était quelqu'un qui me disait : J est le milieu de AC. »

L'auditif peut, dans le prolongement de sa verbalisation, évoquer un ressenti de mouvement qui débouche sur des images visuelles (ou souvent sur des impressions visuelles) ou qui les accompagne. Il aura ainsi mis de l'espace dans son temps mental. C'est ce que nous décrivent :

– Guillaume : « Je me récitais le théorème dans ma tête, je ne voyais pas le triangle, mais quand je me disais *la parallèle à l'un des côtés...* j'avais une impression de deux parallèles, comme une trace qui ne restait pas. »

– et Laetitia : « Quand je me disais... *qui passe par le milieu...*, c'est comme si je voyais un mouvement au milieu d'un segment. Tout se passait comme si, en me parlant dans ma tête, je faisais des mouvements imaginaires qui laissaient des traces lumineuses. »

La kinesthésie me semble très précieuse à développer en mathématiques, car elle porte en elle L'ESPACE et le TEMPS ; elle est un bon moyen de passer de l'un à l'autre pour dynamiser des images mentales trop souvent fixes. Elle est un pont entre le spatial et le temporel.

Comment faire ?

Cette rubrique pourrait être progressivement abandonnée puisqu'elle est schématiquement toujours la même. Elle pourrait être remplacée par une fiche méthodologique unique intitulée *« comment utiliser un théorème ? »*, ou incluse à l'intérieur d'une fiche plus complète *« comment faire une démonstration ? »*.

Le repérage des contextes d'utilisation

Ce repérage permet de créer des liens entre plusieurs notions, donc de travailler le paramètre 3. Il nécessite de faire éclater des blocs culturels par trop rigides, de replacer un acquis récent par rapport à d'autres, quelquefois beaucoup plus anciens, qui seront par le fait même réactivés et rendus disponibles dans des contextes originaux par rapport à leurs habituelles utilisations. Il s'agit d'accéder ici encore à une globalité culturelle souple pour donner du sens à son apprentissage mathématique en réorganisant des notions dans un véritable jeu de construction à démonter et remonter sans cesse. Ce questionnement a pour objet de développer aussi l'imagination anticipatoire.

Cette ouverture à des possibles prépare aussi l'élève à l'éventualité de l'évolution d'un concept. Les concepts mathématiques évoluent en effet dans la scolarité d'un élève. Cette continuelle anticipation de l'avenir évite d'assimiler un concept à un des attributs du concept.

Cartes simplifiées

Lorsque les élèves commencent à prendre l'habitude de ce remue-méninges sur les théorèmes qu'ils apprennent, on peut leur proposer des **cartes simplifiées** regroupant plusieurs théorèmes sur un même sujet. Présenter plusieurs théorèmes sur une seule page permet la mise en évidence des analogies, mais aussi la mise en exergue des différences, en particulier d'utilisation de plusieurs théorèmes semblables. C'est cette nouvelle attitude que l'élève a besoin d'acquérir. Leur représentation en « **Mandala** » lui offre la possibilité de considérer le catalogue complet des outils qu'il a à sa disposition tout en lui montrant la spécificité de chacun d'eux et leur cohérence globale.

L'ensemble de ces cartes, ainsi que des fiches de synthèse heuristique, regroupées dans un **dossier mathématiques,** devient une véritable boîte à outils dans laquelle l'élève prend l'habitude de puiser et qu'il se constitue pour la suite de sa scolarité. Il lui sera bien utile au lycée pour réactiver des souvenirs un peu lointains d'une part et mettre en évidence la cohérence globale de ses acquis d'autre part.

Conclusion

Pour apprendre à faire une démonstration, il ne suffit pas que l'élève ait vu faire le professeur. Il faut qu'il puisse identifier les outils utilisés par celui-ci, y compris dans les dédales de son cheminement mental. **Faisons découvrir aux élèves les moyens mentaux de la démonstration !** Mais surtout, ne mettons pas la charrue avant les bœufs ; ne lui demandons pas de comprendre un raisonnement à base de lois mathématiques s'il n'a jamais eu accès au sens de ces propositions logiques qu'il manipule depuis le début du collège.

La gestion mentale offre à l'enseignant en général et à l'enseignant de mathématiques en particulier les moyens d'une analyse épistémologique de la situation pédagogique.

« Donnons à nos élèves l'intelligence de leurs moyens pour qu'ils découvrent les moyens de leur intelligence. » (A. de La Garanderie)