CHALVIN D., *Utiliser tout son cerveau*, ESF, 1987.
WILLIAMS L.B., *Deux cerveaux pour apprendre*, EO, 1986.

Corps et efficacité mentale

BRON-VELAY, *Pratique de la méthode Vittoz*, E. Levain, 1974.
FLACK M. et COULON (de) J., *Des enfants qui réussissent*, Épi, 1986.

Méthodologie

BUZAN T., *Une tête bien faite*, EO, 1979.
Collectif, *Énergie 6*, Magnard, 1985.
EDWARS B., *Dessiner grâce au cerveau droit*, Mardaga, 1986.
BONO (de) E., *Réfléchir mieux*, EO, 1985.

Compréhension des mathématiques et gestion mentale

De l'algorithme à la compréhension

ALAIN TAURISSON

Professeur au département de mathématiques et d'informatique, section enseignement, à l'Université du Québec à Montréal. Auteur d'un manuel d'enseignement de la programmation, et d'ouvrages de vulgarisation dans ce domaine. Auteur de logiciels destinés à favoriser les capacités de représentation des élèves du primaire et du premier cycle du secondaire. Il intervient auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques. Il a publié *Les gestes de la réussite en mathématiques*, Éditions Agence d'ARC, Montréal, 1988.

On peut décrire certains gestes mentaux conduisant à des savoir-faire. Il est plus difficile de décrire les gestes mentaux de la compréhension en général, et des mathématiques en particulier. La prudence doit être grande dans ce domaine : il est en effet facile de devenir par trop simplificateur et de croire résoudre un problème alors qu'on ne fait que l'ignorer.

Présentation de l'expérience

Un peu de vocabulaire

1. Dans le sous-titre, je parle d'algorithme : un *algorithme* est une suite de règles à appliquer ou d'actions à exécuter dans un ordre déterminé dans le but d'obtenir un résultat précis : savoir faire une multiplication de nombres à trois chiffres consiste à appliquer un algorithme. Un algorithme permet de construire un objet particulier ou de trouver un résultat.

Comprendre un algorithme peut avoir deux sens :

a) savoir l'appliquer ;
b) savoir pourquoi il permet d'obtenir le résultat cherché.

2. La compréhension en mathématiques exige de respecter les caractères singuliers de cette discipline et en particulier de tenir compte des trois éléments suivants :

a) *Les « objets mathématiques » :* ce sont des objets mentaux dans le sens où ils ne se confondent avec aucune représentation concrète : un trait donne une certaine image de la droite, mais la droite mathématique ne se confond pas avec cette représentation. Les objets mathématiques peuvent être des concepts ou des structures.

b) *Le langage mathématique,* fait de signes et de symboles. Ce langage décrit des objets mathématiques, des relations entre eux, ou des algorithmes. Ce langage est précis et cohérent.

c) *Les représentations concrètes* des objets mathématiques : dessins, schémas, situations variées.

La compréhension en mathématiques va provenir pour une part des relations que l'on va établir entre ces trois niveaux. D'autre part, le grand rôle joué par les algorithmes en mathématiques fait que l'on doit se poser la question du lien entre les algorithmes et la compréhension. Plus précisément, les questions que je vais aborder sont les suivantes :

— les gestes mentaux qui permettent de faire le lien entre l'algorithme et la compréhension en mathématiques ;

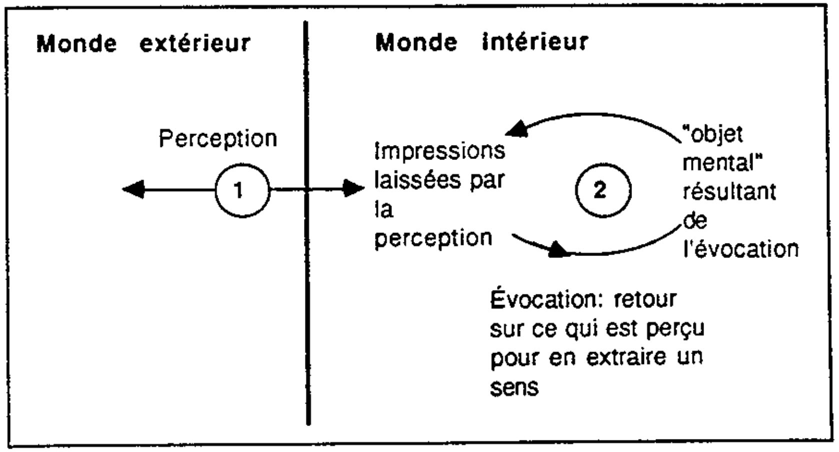
— une description, en termes de gestes mentaux, de certains éléments caractérisant la compréhension en mathématiques.

Un rappel sur le lien entre évocation et perception

L'évocation est un retour actif sur ce qui est perçu, pour en extraire le sens.

Un objet mental n'est pas une *impression* laissée par l'objet réel mais une *reconstruction mentale* effectuée à partir de l'impression laissée par la perception.

L'objet mental dépend surtout de la nature des gestes mentaux utilisés pour faire cette reconstruction mentale, plus que de la nature des impressions laissées par la perception.



Méthodologie

Les faits sur lesquels je vais m'appuyer sont fournis par une tentative d'exploration des gestes mentaux des élèves qui réussissent, et des élèves qui ne réussissent pas. Dans le cas des élèves en difficulté, je vous parlerai d'élèves du primaire, âgés de 9 à 10 ans, que j'ai suivis pendant une ou deux années scolaires. Pendant cette période, j'ai pu me donner les moyens de décrire certains aspects de leur « vie mentale » en relation avec les mathématiques. Quand je croyais avoir compris les « gestes mentaux » qui devaient les conduire à une compréhension d'un aspect donné des mathématiques, je tentais de les placer dans une situation où ils devraient les exercer. Si cette intervention conduisait à un succès, je tentais de la répéter dans des cas que je jugeais équivalents. Au cours de cette suite d'interventions, j'ai tenté de rendre plus objective ma démarche en décrivant les éléments qui me permettaient de décider de l'intervention que j'allais faire. Enfin, j'ai tenté de décrire de façon un peu plus générale, mais avec beaucoup de prudence, ce qu'on peut appeler certains « gestes de la compréhension en mathématiques ».

Cette méthodologie va donner la structure de cet exposé : je partirai d'exemples d'enfants qui ont amélioré leur compréhension des mathématiques. A partir de ces exemples, j'aborderai des éléments un peu plus théoriques.

Détermination de certaines habitudes évocatives

Les premiers moments d'une intervention pédagogique consistent à déterminer certains éléments du style d'évocation d'un élève pour pouvoir intervenir efficacement auprès de lui.

Évocation du texte et de l'image

Je prends en compte trois aspects :
1. la compréhension d'un texte lu par l'élève ;
2. la compréhension d'un texte lu par un autre ;
3. l'interprétation d'une image visuelle.

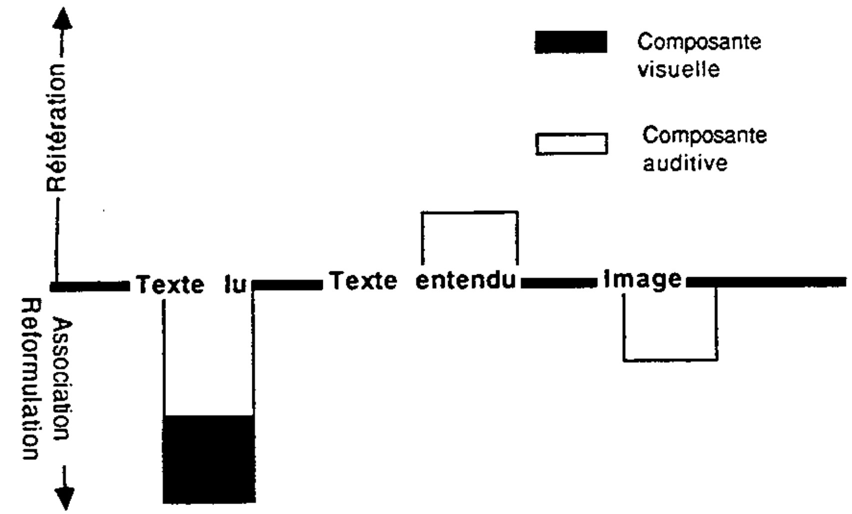
Je résume les habitudes évocatives sur un graphique (voir ci-dessous).

Pour chaque aspect, je sépare l'évocation visuelle et l'évocation auditive. Si un enfant, à partir des mots qu'il évoque verbalement, se donne dans le prolongement de cette évocation verbale des images visuelles, je place un bloc noir à l'extrémité du bloc blanc, et réciproquement dans le cas symétrique. Si les deux blocs, blanc et noir, apparaissent côte à côte pour une même rubrique, nous sommes dans le cas d'une évocation mixte.

Si un enfant, pour donner un sens à ce qu'il entend ou lit, doit le transformer, ou encore pour donner un sens à une image, doit associer une autre image, ou encore lui associer un commentaire fruit de son imagination, j'oriente les blocs vers le bas.

Cet enfant comprend un texte qu'il lit lui-même en l'interprétant et en élaborant à partir du texte donné. Il transforme donc beaucoup ce qu'il lit. Bien que son évocation soit verbale, il se donne des images de ce qu'il lit à partir de l'évocation des mots. Il retient peu ce qu'on lui dit, et semble effectuer moins d'élaboration personnelle que dans le cas du texte lu. Il ne se fait pas d'images visuelles de ce qu'il entend. Il retient les images en donnant une description associative : par exemple,

Exemple :



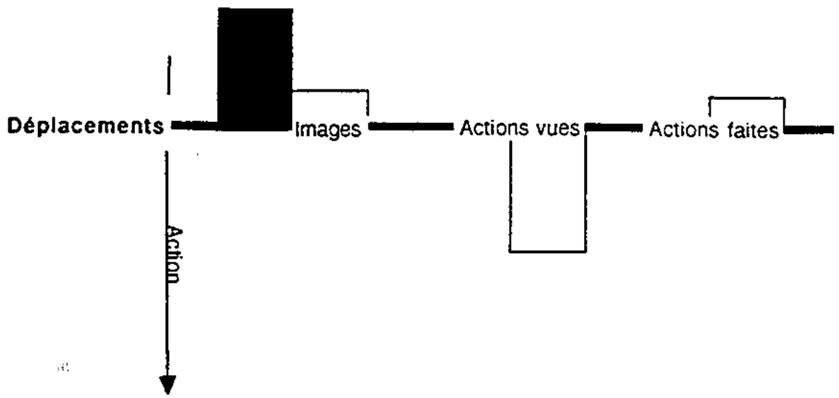
s'il voit trois triangles, il va dire qu'il y a trois bateaux à voile. Un tel enfant va avoir du mal à écouter en classe, il va souvent résoudre un autre problème que celui qu'on lui pose.

Évocation du mouvement

Je prends ensuite en compte l'évocation des déplacements. Je considère trois composantes :
1. le déplacement d'images, sans qu'on puisse percevoir les actions qui engendrent ce mouvement. Je prends des déplacements d'images engendrés par un ordinateur ;
2. le déplacement ou la réorganisation d'objets avec perception des actions sur ces objets : par exemple le déplacement de jetons effectué par un enseignant ;
3. des actions faites par l'élève lui-même sur des objets : déplacements, réorganisation, etc.

Dans chaque cas, je considère si l'évocation de ces déplacements se fait visuellement ou verbalement. Enfin, je distingue :
— si l'élève peut simplement décrire ou représenter le déplacement ou l'action directement ;

— s'il doit au contraire la simuler pour en donner une description.



Exemple : Ce graphique correspond à un élève qui évoque visuellement un déplacement et peut le décrire sans avoir à le simuler. Il évoque verbalement des actions vues et a besoin de simuler les gestes pour en parler. Enfin, il évoque difficilement ce qu'il fait lui-même, dans le cas où il le peut, il le fait sans avoir à refaire d'abord les gestes qu'il a fait.

Quelques exemples permettront de voir le lien entre l'intervention pédagogique et les éléments précédents.

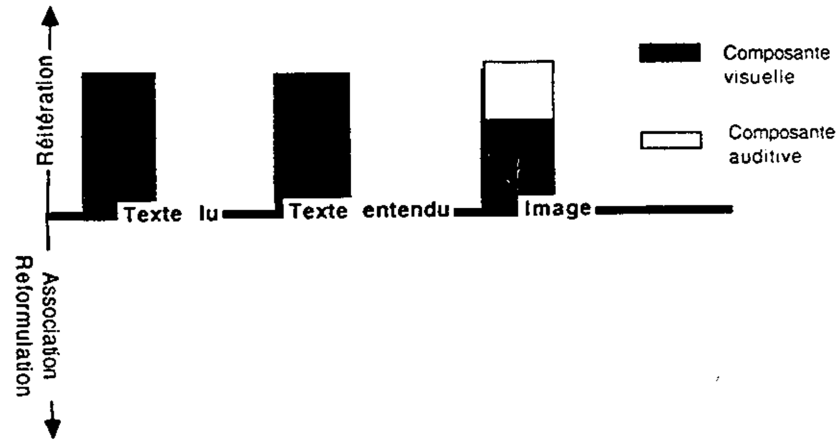
Exemple 1

C. a 11 ans. Il est en grande difficulté en mathématiques. Visuel jusqu'à la caricature, il ne se rappelle strictement rien d'une tentative d'évocation auditive d'un texte. Il donne un sens à ce qu'il voit sans avoir besoin d'en faire une transposition.

Je peux résumer les habitudes mentales qui orienteront mon intervention auprès de lui sur les deux graphiques suivants :

Pour comprendre un texte qu'il lit, il doit se donner des images visuelles qui sont des représentations fidèles du texte lu. Il fait la même chose pour un texte entendu. Les images qu'il se donne pour donner un sens au texte sont purement descriptives.

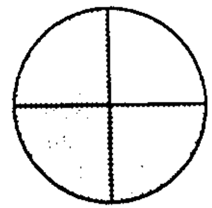
Il se souvient très facilement d'un déplacement d'une image



sur l'écran, il peut le décrire verbalement sans avoir à faire aucun geste.

Dialogue avec C.

Moi — Sais-tu calculer les 3/4 de 20 ?
Lui — ???[1] Non.
Moi — Et 1/4 de 20 ?
Lui — ??? Non.
Moi — Sais-tu prendre le 1/4 d'une pizza ?
Lui — Oui.
Il dessine :



Moi — Regarde bien ce dessin. Est-ce qu'il peut t'aider à calculer les 3/4 de 20 ?

1. Les trois ? indiquent qu'un temps assez long s'est écoulé entre la question et la réponse.

Lui — ??? Non.

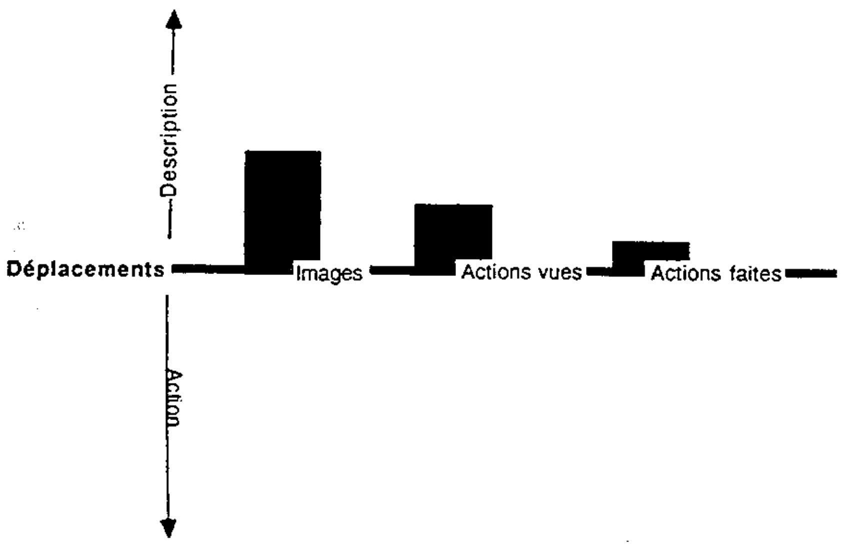
J'insiste, je rapproche le dessin et l'expression 3/4 de 20.

Lui — ??? Non, ça ne m'aide pas.

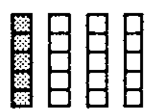
Je fais dessiner par l'ordinateur le dessin suivant en tapant :

COLORE 1 SUR 4

PARTAGE 20 EN 4



L'ordinateur fait le dessin suivant :



La barre ombrée est d'une couleur différente des autres.

Moi — Est-ce que ce dessin a un rapport avec 1/4 de 20 ?

Lui — Oui, c'est 5.

Moi — Comment tu as fait ?

Lui — Tu vois qu'il a partagé en 4, et il en a barbouillé 1.

Moi — Est-ce que tu peux imaginer le dessin correspondant à 3/4 de 20 ?

Lui — Oui, il faut en barbouiller 3.

Moi — Combine : qu'est-ce que ça ferait, 3/4 de 20 ?

Lui — 15.

On constate d'abord que le dessin de la pizza n'est pas considéré comme l'indication d'une division suivie d'une multiplication pouvant se transférer sur des nombres. Pourtant c'est C. qui a fait le dessin et l'a associé à 3/4. Le second dessin, en revanche, est tout de suite associé au 1/4 de 20, puis le transfert aux 3/4 de 20 s'est facilement effectué. L'ordinateur et cette représentation avaient déjà été utilisés pour aborder les divisions numériques. Par ailleurs, ce schéma donne une représentation des nombres 20 et 5, alors que ce n'est pas le cas pour la représentation en pizza.

Moi — Regarde ta feuille maintenant[1] : comment ferais-tu le calcul 3/4 de 20 ?

Lui — ???

Moi — Ce que tu viens de faire ne t'aide pas ?

Lui — Non.

Moi — Pourtant, tu peux trouver la réponse en regardant le dessin ?

Lui — Oui. Avec un dessin, je comprends toujours, mais le reste !

On note que, si le dessin permet de voir les 3/4 de 20, il ne sert pas encore de schéma directeur pour effectuer un calcul purement numérique hors de sa présence. On note aussi la remarque de C. disant qu'avec un dessin il comprend toujours !

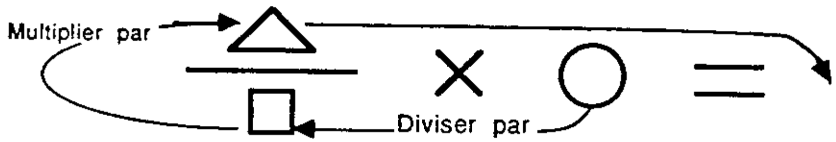
Moi — Je vais te dire comment faire : regarde ce schéma et dis-moi si ça t'indique comment faire un calcul comme 3/4 de 20.

Ce schéma est la description d'un algorithme à suivre.

Il regarde le dessin avec beaucoup d'attention.

Lui — Je peux mettre mes nombres ?

1. Il ne voit plus le dernier schéma.



Moi — Oui.
Lui — Je commence avec le rond ?
Moi — Oui.
Lui — Ensuite, je divise par 4 ?
Moi — C'est ça.
Il écrit 20 ÷ 4 = 5
Lui — Ensuite, je multiplie par 3 ?
Moi — C'est ça.
Lui — Et je place le résultat là ?
Moi — Oui.

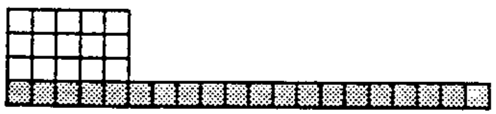
Il a convenablement interprété le schéma : il a bien lu ce dessin comme l'indication d'un algorithme à réaliser. Il sait appliquer l'algorithme.

Moi — Je vais faire un dessin sur l'ordinateur. Ne regarde pas ce que j'écris.

Il se tourne pour ne pas regarder, et je tape :

20 →
MONTRE 3/4

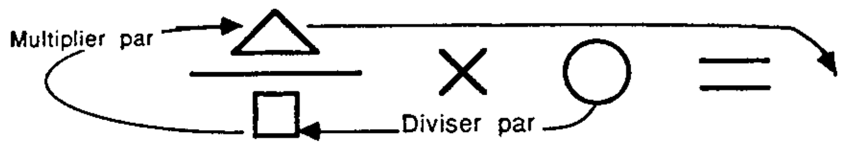
L'ordinateur fait le dessin suivant :



La rangée de 20 carrés est rouge. Les trois rangées de 5 carrés sont vertes.

Moi — Est-ce que tu peux voir 3/4 de 20 dans ce dessin ?
Lui — ? ? ? Non.
Moi — Combien il y a de carrés en rouge ?

Lui — 20.
Moi — Combien de carrés verts ?
Il compte.
Lui — 15.
Moi — Regarde simplement la première rangée de carrés verts. Tu peux imaginer qu'il n'y a qu'elle, que les autres rangées n'existent pas ?
Lui — Oui.
Moi — Calcule le 1/4 de 20.
Il reprend le schéma :



et fait consciencieusement ses opérations (division par 4, multiplication par 1).

Lui — C'est 5.
Moi — Regarde maintenant la première rangée de carrés verts.
Lui — On peut dire que c'est le quart de 20.
Moi — Combien on a de rangées sur le dessin ?
Lui — 3.
Moi — Ça fait combien de quarts ?
Il ne comprend pas la question.
Moi — Je montre la deuxième rangée : les deux rangées ensemble, ça fait combien de quarts ?
Lui — 2.
Moi — Et les trois rangées ?
Lui — 3.
Moi — Ça fait combien de quarts en tout ?
Lui — 3 quarts.
Moi — Est-ce que tu vois le lien entre le calcul que tu as fait et ce dessin ?
Lui — Oui.

L'algorithme, tout en étant un moyen d'obtenir un résultat numérique, est devenu un moyen d'interpréter une réalité d'une autre nature, ici un dessin fait par l'ordinateur. Le travail de C. consiste à interpréter ce dessin à travers un algorithme. Le dessin est évoqué à partir de la projection mentale faite à partir de l'algorithme.

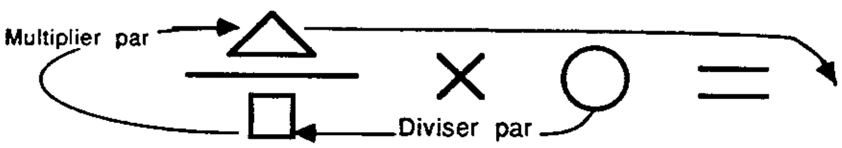
Moi — Tourne-toi. Je vais écrire quelque chose sur l'ordinateur.

J'écris :

21 →
MONTRE 3/7

Moi — Trouve la fraction de 21 représentée en vert.

Je lui donne de nouveau le schéma.



Il le place devant lui et écrit : / de 21.

Puis il écrit 21 ÷ 7 = 3 ; 3×3 = 9

Il complète ensuite sa fraction : 3/7 de 21 = 9

Lui — C'est 3/7.

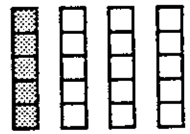
Je vais ensuite faire d'autres dessins analogues au précédent et lui demander de trouver la fraction correspondante. Nous continuerons de cette façon pendant trois quarts d'heure, en faisant afficher des représentations de fractions et l'algorithme lui servant à interpréter le dessin.

En partant, il me dit qu'en classe il ne comprend rien parce que son professeur explique bien trop : il parle, il parle ! On retrouve là l'expression de son besoin d'évocation visuelle.

Interprétation

Cette portion d'entrevue permet d'illustrer certains éléments concernant la compréhension en mathématiques.

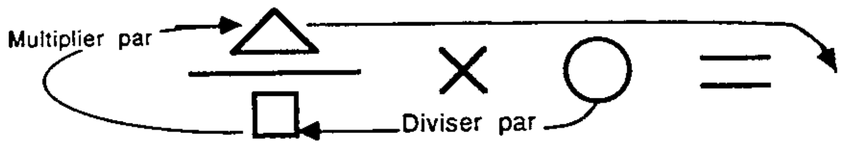
L'image de la pizza n'est pas vue comme la représentation d'une suite d'actions à effectuer, mais comme un dessin statique n'exprimant rien d'autre qu'une pizza partagée en 4 et dont on prend 3 morceaux. Au contraire, C. faisait une association très forte entre ce dessin statique et l'écriture 3/4, et seulement avec ce dessin.



La première représentation donnée par l'ordinateur est utilisée comme une représentation de 3/4 de 20, mais n'est pas utilisée non plus comme support pour faire le calcul.

Ces dessins ne sont pas vus comme la représentation d'un processus général, mais seulement comme une représentation statique. Il y a malentendu entre l'enseignant et l'élève sur la signification de ces représentations concrètes : l'enseignant les considère comme un langage exprimant une suite d'actions que l'on peut associer à un calcul, l'élève les considère comme représentant un état.

Le schéma suivant indique directement la marche à suivre pour faire le calcul.



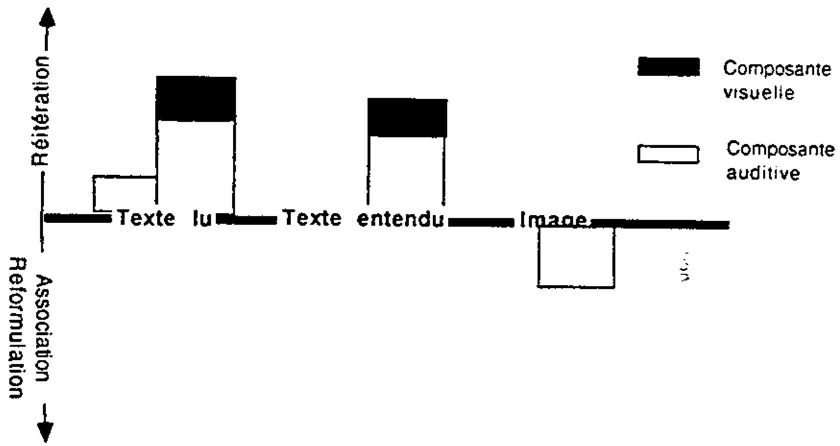
C. comprend ce que le schéma veut dire, il l'interprète bien comme la description d'un processus à suivre. Si nous en étions restés là, il y aurait eu compréhension d'un algorithme, mais nous serions encore très loin du début de la compréhension d'un objet mathématique, ici la fraction. Le travail de compréhension de cet objet mathématique commence quand C. tente d'interpréter le dessin à partir de l'algorithme. Il essaie d'évoquer, donc de donner un sens au dessin vu sur l'ordinateur en partant d'un algorithme numérique.

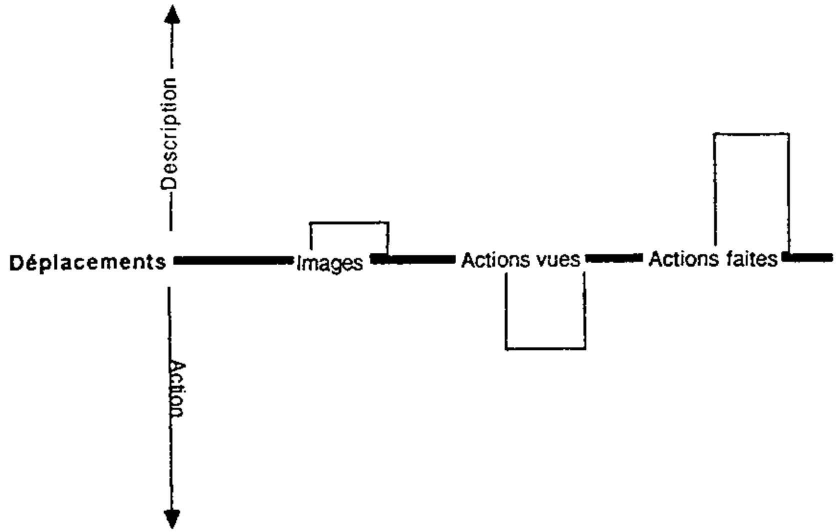
La fraction intervenant dans l'algorithme n'est plus seulement vue comme un moyen de faire un calcul, mais aussi comme pouvant se projeter dans une représentation concrète et en même temps lui donner un sens. Ce travail mental de projection est un geste de compréhension.

Exemple 2

A., 10 ans, est elle aussi en difficulté en mathématiques. Comme les schémas ci-dessous le montrent, elle évoque surtout verbalement les textes lus et entendus. Elle conserve plus d'informations d'un texte lu. Elle peut voir certaines images dans le prolongement de l'évocation auditive.

Elle se souvient bien de ce qu'elle fait, moins bien de ce qu'elle voit faire et est obligée souvent de se refaire le mouvement pour se le rappeler. Elle se souvient de façon auditive du déplacement d'une image et doit s'aider du geste pour se le remémorer. Elle dit que le geste qu'elle fait l'aide à se souvenir du déplacement.





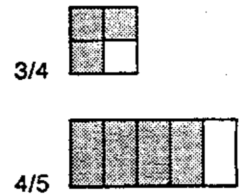
Dialogue avec A.

Je lui demande de comparer 3/4 et 4/5.

Elle — C'est pareil.

Moi — Pourquoi ?

Elle fait les deux dessins suivants :



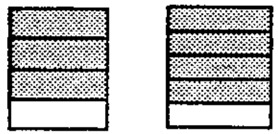
Elle — Tu vois, il en reste un dans les deux cas.

Moi — Est-ce que tu sais calculer les 3/4 de 20 ?

Elle — Oui.

Elle fait le calcul. La dernière fois, je lui avais donné verbalement l'algorithme pour faire le calcul, d'abord sur des exemples. Je lui avais demandé de me décrire l'algorithme en employant les mots *numérateur, dénominateur* et *nombre.* Après

quelques instants, elle avait dit qu'il fallait diviser le nombre par le dénominateur, puis multiplier par le numérateur.
Moi — Comment fais-tu pour calculer les 3/4 de 20 ?
Elle — Je divise le nombre par le dénominateur et je multiplie par le numérateur.
Elle fait l'opération sans fautes. Elle trouve 15.
Moi — Peux-tu calculer les 4/5 de 20 ?
Elle trouve 16.
Moi — Qu'est-ce qui est plus grand, les 3/4 de 20 ou les 4/5 de 20 ?
Elle — C'est les 4/5 de 20.
Moi — Pourtant, regarde ton dessin.
Elle ne dit rien et refait les dessins suivants :



Les deux rectangles sont maintenant égaux.
Moi — Qu'est-ce qui est plus grand, 3/4 ou 4/5 ?
Elle — C'est pareil.
Moi — Pourquoi ?
Elle — D'un côté on divise en 4 morceaux, alors les morceaux sont plus grands qu'à côté, mais à côté il y a plus de morceaux alors c'est pareil.
Moi — Chaque morceau à gauche, c'est quelle fraction du rectangle ?
Elle — ???
J'essaie de lui expliquer ce que je veux dire par « quelle fraction du rectangle », mais je sens bien que nous ne nous comprenons pas.
Moi — 3, c'est le quart de quoi ?
Elle — ??? (hésitante) de 12 ?
Moi — Sûre ?
Elle — (sourire) Oui, oui.
Moi — 3, c'est le cinquième de quoi ?

Elle — ??? de 15.
Je continue avec une dizaine d'exemples. Tous les calculs se font de tête.
Moi — Quand tu connais 1/8, comment tu fais pour avoir 1/4 ?
Elle — ??? C'est 2 fois plus.
Grand sourire.
Elle — Ah, je comprends !
On continue avec d'autres exemples analogues.
Moi — Comment fais-tu pour trouver le 1/8 d'un nombre ?
Elle — Je divise.
Moi — Tu fais une division-partage ou une division-regroupe ?
Elle — Partage.
Moi — Regarde les dessins que tu as faits tout à l'heure. Qu'est-ce qui est plus grand, 3/4 ou 4/5 ?
Elle — 4/5.
Moi — Pourquoi ?
Elle — Parce que le morceau qui reste d'un côté, c'est 1/4 et de l'autre côté c'est 1/5 et que 1/4, c'est plus grand que 1/5.
Nous avons ensuite comparé 5/6 et 6/7, 7/8 et 8/9, etc.
La semaine suivante, il fallut reprendre une partie de ce qui avait été fait. Deux semaines plus tard, elle pouvait faire des problèmes très variés sur les fractions.

Interprétation

a) La présentation de l'algorithme.
Dans les deux cas, les élèves sont partis d'un algorithme qui leur a été donné. Dans certains cas, la meilleure solution consiste à donner l'algorithme directement en tenant compte du style d'évocation de l'élève : c'est ce qui a été fait dans les deux cas précédents.
Certains élèves acceptent beaucoup plus difficilement de « se laisser enseigner » de cette façon. On peut alors s'appuyer sur ce qu'ils savent déjà, ce qui est toujours préférable.
Exemple : F., 10 ans, a peur des maths. Il est presque exclusivement auditif. Je lui demande de calculer « les 3/4 de

28 ». Il me dit 12 (3×4). Je lui demande s'il sait prendre les 3/4 d'une pizza. Il me dessine une pizza et ajoute 10 traits dans tous les sens. Je lui demande d'imaginer qu'il a 8 $, et qu'il doit me donner 1/4 de ce montant. (Il parle tout haut.)

Lui — Non, c'est pas 4 parce que c'est la moitié. Mais c'est 2 $.

Moi — Et si je te demandais les 3/4 de tes 8 $?

Lui — ? ? ? 6 dollars.

Il a ajouté 2 + 2 + 2.

Je lui demande ensuite de me raconter comment il a fait le calcul. Quand il arrive à une formulation qui lui convienne, je l'écris : Pour calculer 3/4 de 8 : 1° J'ai divisé 8 par 4. Ça a donné 2. 2° On fait « fois 3 ».

Je lui demande ensuite de calculer les 3/4 de 28. Il place à côté de lui la feuille sur laquelle je viens d'écrire. Il effectue un calcul analogue. Au bout de trois problèmes semblables, il n'utilisera plus la feuille et pourra énoncer l'algorithme de calcul lui-même avec les mots « numérateur » et « dénominateur ». Il avait « compris » l'algorithme de calcul.

b) La compréhension bloquée par une analogie trop forte entre une représentation concrète et un objet mathématique.

Bien que l'approche soit très différente, on retrouve certaines similitudes dans les deux cas précédents.

A. interprète à faux les dessins associés à la fraction. Elle donne au dessin un statut équivalent à l'écriture mathématique. 3/4 c'est ce dessin : 

Pour elle, 3/4 se définit et se résume au dessin, alors que 3/4 ne devrait pas renvoyer au dessin, mais à l'objet mathématique 3/4.

Pour préciser ce que peut être un geste mental de compréhension en mathématiques, je crois qu'il faut préciser certaines caractéristiques des objets mathématiques, de la langue mathématique et du rôle des représentations concrètes.

Objet mathématique, langue mathématique, représentations ou situations concrètes

Un objet mathématique ne se confond jamais avec une représentation qu'on en donne. On peut dire qu'un objet mathématique est un objet mental, exprimé parfaitement par l'écriture mathématique et dont certaines propriétés peuvent être rendues tangibles par des représentations diverses. L'objet mathématique parallélogramme, par exemple, ne se confond pas avec le dessin d'un parallélogramme. Bien plus, alors que le « spectateur non mathématicien » va voir dans ce dessin un parallélogramme :

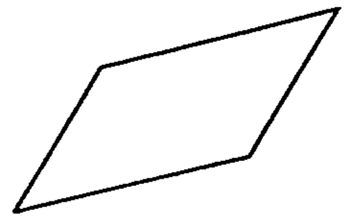


figure 1.

le « mathématicien » ne verra un parallélogramme que s'il reconnaît certaines propriétés qui lui permettent d'affirmer qu'il s'agit d'un parallélogramme. Voici par exemple deux cas où le spectateur non mathématicien ne verra aucun dessin évoquant un parallélogramme alors que le mathématicien, lui, verra un parallélogramme.

Les figures 2 et 3 constituent un langage, et c'est ce langage qui permet de reconnaître le parallélogramme. La figure 1 est simplement une forme. Cette forme est reconnue comme un parallélogramme par un spectateur, mais le mathématicien ne le reconnaît pas.

L'objet mental parallélogramme permet une évocation particulière de la réalité. Cet objet mental, qui est aussi un objet mathématique, peut se projeter dans diverses réalités concrètes, sans jamais se réduire à ces représentations.

C'est la même chose pour la fraction. L'écriture mathématique a/b résume toutes les facettes de l'objet mathématique « fraction a/b » dont on peut donner de nombreuses représentations

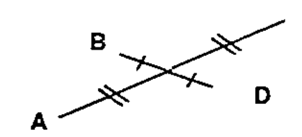


figure 2.

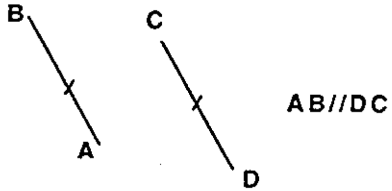


figure 3.

concrètes. Mais aucune des représentations concrètes ne peut réunir toutes les interprétations possibles de la fraction. En même temps que la représentation concrète explicite une propriété particulière de l'objet mathématique, elle cache les autres et peut bloquer la compréhension de l'objet mathématique si on en reste là.

Un geste de compréhension en mathématique, l'évocation ou « l'œil du mathématicien »

Une mathématique « comprise » permet une évocation particulière de la réalité. Pour préciser les caractéristiques particulières de cette évocation mathématique, je vais rapidement la comparer à l'évocation du spectateur non mathématicien, et à celle de l'artiste dessinateur.

Le spectateur voit et reconnaît les objets à partir de leur apparence. Il peut les nommer. Il voit tout ce qui est explicitement représenté.

L'évocation de l'artiste dessinateur dissout les objets représentés et indentifiables pour ne voir que des rapports entre des lignes, des espaces positifs et négatifs, des relations spatiales, un équilibre global entre les formes, qu'elles soient figuratives ou non. Pour provoquer l'évocation de l'artiste dessinateur, on peut par exemple placer le dessin à reproduire à l'envers, de telle sorte que le spectateur ne puisse reconnaître aucun élément

identifiable du dessin. On est obligé alors de changer d'évocation et prendre conscience des simples rapports entre les lignes.

L'évocation du mathématicien consiste à projeter dans la réalité des objets mathématiques : un parallélogramme dans les exemples précédents est reconnu dans des représentations concrètes très différentes. La fraction permet d'évoquer ce dessin :

C. n'avait jamais vu un dessin de cette sorte. Pourtant, il a reconnu une fraction. En effectuant ce travail de projection sur le dessin, il a fait un pas vers la compréhension de l'objet mathématique fraction. Les élèves peuvent faire la distinction entre « l'œil du mathématicien » et « l'œil du spectateur ». Dès qu'ils peuvent faire cette distinction, ils se seront donné une intention qui dirigera leur façon d'utiliser les représentations concrètes.

Vers l'évocation du mathématicien : l'algorithme projeté sur des représentations concrètes

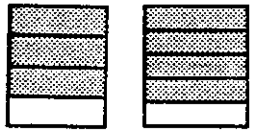
Dans le cas de A. comme de C., un premier pas est fait en donnant un algorithme associé à une écriture fractionnaire, visuellement dans un cas, verbalement dans l'autre.

Le travail de C. a consisté à interpréter des représentations concrètes particulières à partir de l'algorithme qu'il connaissait. En effectuant ce travail, la fraction a dépassé son statut d'outil de calcul pour devenir un outil d'interprétation d'une certaine représentation. C. a donné à l'écriture fractionnaire un statut qu'elle n'avait pas : il a fait d'un outil de calcul un outil d'interprétation de la réalité, un outil d'évocation. Il a fait un pas vers la compréhension.

Le travail de A. a été quelque peu différent. Elle n'a travaillé qu'au niveau du calcul, du langage mathématique si l'on veut. Elle a fait des liens entre différents termes de cette langue . l'algorithme donné pour faire le calcul (prendre le nombre, le diviser par le dénominateur et le multiplier par le dénominateur) lui a permis de faire des liens entre la multiplication et la division. Le sens de la fraction est d'abord rattaché au contexte linguistique dans lequel on se trouve, c'est-à-dire la langue mathématique. Une fois ce travail fait, elle est, elle aussi capable d'interpréter des représentations concrètes de façon nouvelle. Elle donne un sens complètement différent aux dessins qu'elle faisait.

Au lieu de et

Elle fait :



Le dessin ne définit plus la fraction, mais il est devenu un lieu où elle peut projeter une propriété numérique associée à un objet mathématique : elle en est venue aussi à pratiquer une évocation mathématique.

Exemple 3

Certains élèves se placent directement au niveau de la langue mathématique pour résoudre les problèmes, ils ont *une compréhension « linguistique » des mathématiques.*

S., 9 ans, avait à résoudre le problème suivant : « Un père possède 100 dollars. Il veut répartir cette somme entre ses trois enfants. Chaque fois qu'il donne 5 dollars à l'aîné, il donne 3 dollars au second (cadet) et 2 dollars au dernier (benjamin). »

J'énonce le problème. Il m'écoute avec soin et ne dit plus rien. Son regard est fixé droit devant lui. Il n'écrit pas. Au bout d'une minute environ, il me dit : 50, 30 et 20, et il m'explique comment il a fait : « 5, 3 et 2, ça fait 10. 10 fois 10, ça fait 100. 5 est la moitié de 10, donc le premier avait la moitié de 100, donc 50. Quand tu as 50, le reste est facile : tu multiplies par 10, et tu as 30 et 20. »

Je lui demande s'il a pensé à des dollars pendant son calcul : non, juste aux nombres. Il faut remarquer qu'il a trouvé 50

parce que 5 était la moitié de 10, donc que la proportion devait être conservée, d'où le 50.

Deux éléments sont particulièrement frappants dans la méthode utilisée par S. :

1. Pendant toute la recherche de la solution, il se place uniquement au niveau numérique. Il n'y a aucune traduction explicite en dollars, aucune référence aux aspects concrets du problème.
2. Il a une familiarité très grande des propriétés numériques. Il utilise plusieurs propriétés successivement et passe très facilement de l'une à l'autre : il observe d'abord que le père donne chaque fois la moitié à l'aîné, donc que l'aîné aura la moitié du total. Ensuite, il utilise une autre propriété : l'aîné aura au total dix fois plus que ce que le père lui donne en une fois. Cette proportion sera conservée et sera respectée pour ses frères. Ils auront eux aussi 10 fois plus que ce que leur père leur donne en une fois, ils auront donc respectivement 10 fois 3 et 10 fois 2.

Si une langue est un système dont tous les termes sont solidaires et où la valeur de l'un ne résulte que de la présence simultanée des autres [1], nous pouvons dire qu'il existe une langue mathématique écrite dont l'écriture utilise un certain nombre de signes (les nombres, les signes des opérations, l'égalité, l'inégalité, etc.) définissant les objets mathématiques et leurs relations. Dans cette langue, la soustraction se définit par rapport à l'addition, la multiplication par rapport à l'addition, la division par rapport à la multiplication, les termes de diviseurs, facteurs, multiples, nombres premiers, etc. n'étant rattachés qu'à des propriétés numériques, sans référence, semble-t-il, à aucune concrétisation.

S. parle et utilise cette langue mathématique comme on utilise une langue maternelle : un mot tire son sens des liens directs avec les autres mots et avec le contexte linguistique.

S. explique qu'il s'est placé depuis la maternelle dans un univers purement numérique. Il a joué avec une calculatrice dès la maternelle et il me dit qu'il essayait toujours de prévoir le résultat d'un calcul avant de le demander à la calculatrice. La calculatrice, et la façon dont il l'utilisait, lui a donné accès directement à la structure mathématique. C'est cette structure

1. Saussure, *Cours de linguistique générale*, p. 169.

qui lui était familière et qu'il a ensuite projetée dans un univers plus concret. Depuis cette époque, S. est devenu un excellent élève en mathématiques, ce qu'il n'était pas encore à l'époque de l'entretien que je rapporte.

Cela nous montre qu'il y a un autre accès, plus direct, à la compréhension mathématique : un contact direct avec la structure mathématique et son écriture. Il faut remarquer que S. a plongé dans la structure mathématique dans un contexte non scolaire. C'est seul avec sa calculatrice qu'il travaillait. Il ne faisait pas d'opérations pour appliquer un algorithme, mais pour faire des liens entre des objets mathématiques. Il s'agissait non pas d'une mécanisation de son activité, mais d'un travail mental dont il était le seul maître et dont le but était d'utiliser les possibilités de la calculatrice pour lui permettre d'explorer les propriétés numériques vues sous les angles les plus variés, jusqu'à pouvoir les prévoir à coup sûr.

Le geste de la compréhension linguistique

Il s'agit de transformer une forme donnée en d'autres formes pour faire le plus de liens possibles à l'intérieur de la « langue mathématique ».

On peut plonger les élèves dans une activité de ce style de la façon suivante :

On leur indique comment faire le calcul 3/4 de 12. On leur donne un algorithme de façon auditive ou visuelle.

Ils appliquent l'algorithme à travers quelques exercices. Pour l'instant, il n'y a pas compréhension mathématique, mais simplement compréhension d'un algorithme particulier.

Ensuite, on cherche, par exemple :

— 3/? de 12 = 18.
— ?/4 de 28 = 49.
— Toutes les possibilités correspondant à ?/ ? de 36 = 54.
— Comment caractériser les nombres permettant le calcul ?/ ? de 72 dans l'ensemble des nombres entiers.
— Comment caractériser les nombres pouvant remplacer le ? pour que l'expression 3/4 de ? soit calculable.
— etc.

Au cours de ces activités, on emploiera les mots mathématiques les plus précis possible : numérateur, dénominateur, multiple, diviseur, etc.

Il est préférable de faire tous ces calculs de tête, sans écrire.

Quand un élève bloque, on retourne à la définition verbale ou schématique de l'algorithme correspondant au style d'évocation. On simplifie les nombres jusqu'à l'extrême s'il le faut plutôt que de donner la réponse ou une explication. Il faut que l'élève, à partir d'un aspect qui lui est donné, fasse lui-même le travail mental qui consiste à l'envisager sous une forme différente. C'est *cette transformation qui est à la source de la compréhension mathématique au niveau de la langue mathématique.* Ces transformations multiples vont lui permettre de prendre en compte la complexité à l'intérieur de laquelle la compréhension va pouvoir se construire en tissant le plus de liens possibles entre l'écriture nouvelle et toutes les autres écritures déjà connues.

On pourrait être tenté de faire de ce geste mental de reformulation et de déplacement de sens à l'intérieur même de la langue mathématique l'essentiel de la compréhension en mathématique. Cela pourrait conduire à de graves erreurs.

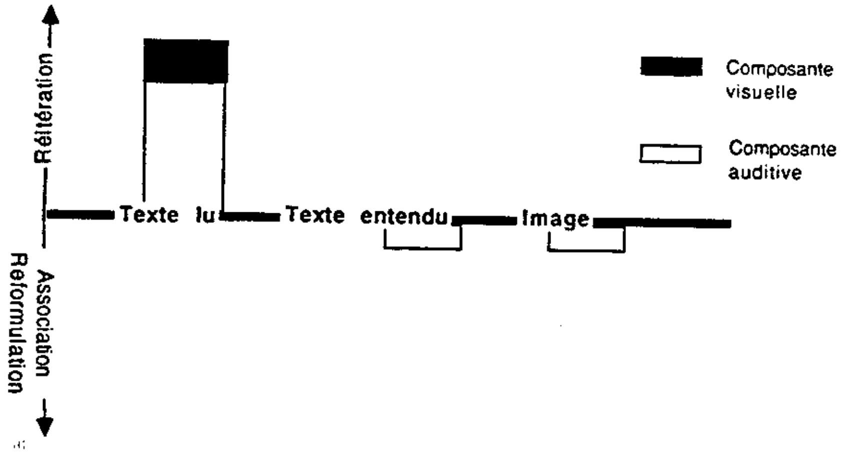
La langue mathématique, même si elle exprime des réalités non concrètes, doit se construire aussi à partir de liens très forts avec la réalité.

Exemple 4

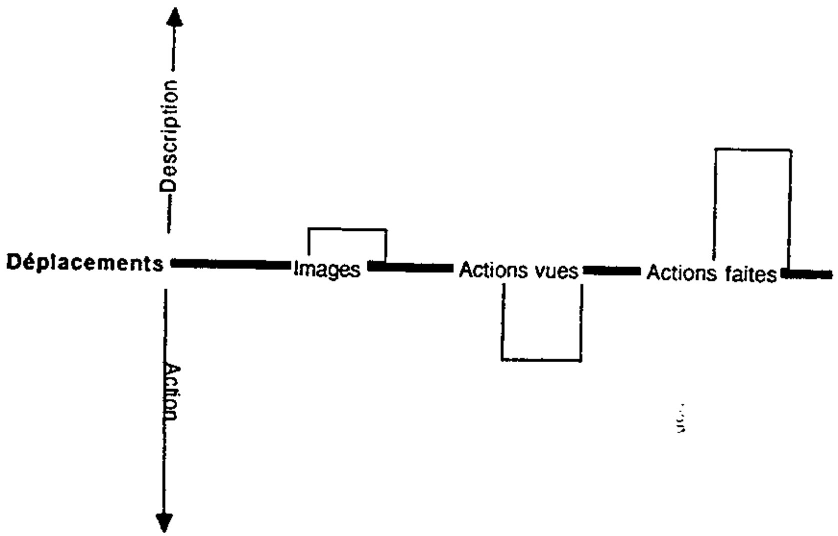
B. a 9 ans. Il est dans une école où l'on exige beaucoup. Il échoue en mathématique dès qu'on lui demande de faire le moindre problème.

Il retient peu de chose d'un texte qu'on lui lit. Il retient fort bien un texte qu'il lit lui-même. Il peut se faire des images en lisant lui-même un texte. Quand il lit lui-même un texte, il est fidèle au texte alors qu'à l'écoute d'un texte, non seulement il garde peu de choses, mais ce sont en outre des éléments interprétés et peu fidèles par rapport à ce qui a été lu. B. élabore, et c'est ce qu'il fait en classe. Il entend deux mots d'un cours et le voici parti très loin dans son langage intérieur.

Il interprète très difficilement une représentation visuelle.



Il évoque un peu plus facilement un mouvement vu sur un ordinateur, par exemple, qu'une image statique, mais son évocation reste approximative. En revanche, il évoque fort convenablement les gestes qu'il voit faire et est capable de les répéter et de les nommer.



Un apprentissage à l'intérieur du contexte linguistique ne conduisant pas à une compréhension réelle

En mathématique, B. n'associe jamais un processus à une opération, multiplication et division en particulier. La multiplication est pour lui définie par sa table et la division est vue comme le terme manquant à une multiplication. Il a beaucoup de difficultés à résoudre des problèmes. Il ne sait pas ses tables et fait de nombreuses erreurs en faisant divisions et multiplications.

Fondée sur le langage, le sien, sa compréhension fait toujours intervenir le temps. Il m'explique comment il retient — si l'on peut dire — ses tables : pour trouver 7×6, il part de 7×10, et retranche 7 jusqu'à arriver à 7×6, processus long et qu'il ne parvient pas à mener à son terme sans erreurs.

Je lui apprends de façon complètement auditive ses tables de multiplication. Il peut apprendre complètement une table en 6 minutes.

Les erreurs qu'il fait dans les opérations proviennent, d'une part, de sa méconnaissance des tables, mais surtout du fait qu'il n'a aucune méthode pour faire le calcul. L'enseignant lui *montre* comment faire, mais il ne retient pas cet enseignement par l'image. D'autre part, il ne veut pas — pour l'instant — savoir *pourquoi* on fait comme ça, mais il veut savoir *comment* on fait. On lui a, à l'école, expliqué *pourquoi* par diverses méthodes très imagées qui ne lui ont laissé ni souvenir, ni compréhension.

Lui expliquer directement comment faire une multiplication n'aboutit à rien. Il ne garde que des bribes de ce qui lui est dit directement. Je lui raconte alors comment je fais pour faire une multiplication tout en faisant l'opération devant lui. Je lui demande ensuite de raconter comment j'ai fait. Je recommence en parlant et en racontant le plus précisément ce que je fais : la façon dont j'indique les décalages, où je place les retenues, ce que je me dis en faisant l'opération. Ensuite, je lui demande de me dire ce que je dois faire : je tiens encore le crayon, mais j'obéis strictement à ses instructions. *C'est en me donnant ses instructions qu'il commence à se faire une description de l'algorithme.* Je lui donne ensuite le crayon en lui demandant de dire tout fort ce qu'il va faire. Il fait bien l'opération, mais ne me dit rien. Cependant, l'opération est très bien menée. Il me dira ensuite qu'en faisant l'opération, il se disait comment faire mais que ça l'empêchait de travailler que de le dire tout fort. Ensuite, il m'explique sans faire l'opération comment on doit faire une multiplication.

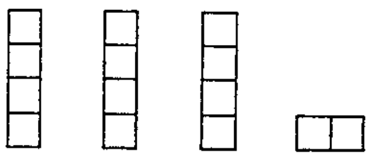
La semaine suivante, B. savait encore faire ses multiplications. Il a eu depuis de bonnes notes quand il s'agissait de faire des opérations. Il savait se raconter l'algorithme et avait une méthode à laquelle il pouvait recourir.

Le problème des tables et des algorithmes a été résolu assez vite pour lui en utilisant des techniques très auditives. Le problème de l'association de processus aux opérations arithmétiques fut beaucoup plus difficile à résoudre.

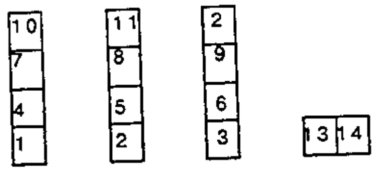
La perte de contact avec la réalité

B. pouvait résoudre l'équation : $12 \div 3 =$. Il ne pouvait même pas partager 12 cubes en quatre paquets égaux quand on lui demandait de le faire, et encore moins faire le lien entre ce partage et l'opération mathématique. Je tente de lui faire préciser ce qu'est un paquet. On cherche des synonymes : morceau, part, partie, portion, groupe, etc. Je lui explique comment je fais pour faire le partage. Dès que je change les nombres, c'est de nouveau l'échec. Dès qu'il s'agit de faire une action concrète à la suite d'une consigne, il revit une situation d'échec et n'agit plus de façon rationnelle. Il ne s'occupe plus du sens des mots et agit dans l'affolement.

Je tape sur l'ordinateur PARTAGE 14 EN 3. L'ordinateur donne cette représentation :



L'ordinateur place les carrés dans l'ordre indiqué ci-dessous, à une vitesse que l'on peut faire varier :



B. regarde l'image se former. Quand il le décide, il éteint l'écran et tente de refaire avec des petits cubes ce que l'ordinateur a fait. Il refait les trois colonnes, mais ne sait que faire avec les deux derniers cubes. Il les place finalement sur les deux premières colonnes.

On recommence à regarder ce que fait l'ordinateur une fois, deux fois, trois fois. Le problème reste le même. On voit à quel point l'image est inefficace dans son cas.

Je lui demande maintenant de procéder autrement : il doit me demander les cubes nécessaires pour faire une rangée ; il lui faut d'abord trois cubes et il les place convenablement. Il lui en faut ensuite trois autres et il continue jusqu'à ce qu'il ne m'en reste que deux dans les mains. Il m'en demande encore trois.

— Je ne peux plus t'en donner trois, il m'en reste deux.
— ...
— Qu'est-ce qu'on en fait ?
— On les jette ? (Rires.)
— On va regarder ce que l'ordinateur en fait.

On observe.

— Je comprends ce que fait l'ordinateur : il les met de côté.

Je lui demande de faire d'autres partages de la même façon. Il ne se trompe plus et vérifie que l'ordinateur fait bien comme lui. B., bien que presque exclusivement auditif, ne retient que fort peu de l'écoute d'un autre, pour des raisons probablement d'ordre affectif : il considère la parole de l'autre comme une sorte d'agression. Il ne comprend que ce qu'il se dit, lui. Cela apparaît en particulier dans la différence très grande entre ce qu'il retient d'un texte qu'il lit lui-même et d'un texte qu'on lui lit. Il faut donc l'amener à se dire ce qui va l'aider dans sa compréhension en mathématiques. Une stratégie consiste à l'amener à agir par l'imitation d'un autre qui peut être l'ordinateur et à prendre conscience de cette action en lui demandant de la décrire. A partir du moment où il s'est donné cette description verbale correcte, il peut donner un sens à ce qu'il fait.

En procédant toujours de façon indirecte (regarde ce que je fais pour le raconter, fais la même chose, que dire à l'ordinateur pour qu'il fasse la même chose ?) nous avons pu associer des processus aux opérations de base et aborder les fractions. Le cas de B. est intéressant parce que :

— B. avait une bonne compréhension « linguistique » des mathématiques. Il faisait le lien entre les diverses opérations, il a appris à faire des calculs facilement, il pouvait réciter ses tables. Pourtant, il était toujours incapable de résoudre le moindre problème.

— B. était incapable de la moindre projection dans le concret de ce qu'il faisait au niveau linguistique. Il ne pratiquait aucune « évocation du mathématicien ». La langue mathématique qu'il pratiquait était une langue morte.

— Sans analyse de ses caractéristiques évocatives, il aurait été très difficile d'aider B. à associer un processus à une opération et de le conduire à pratiquer une projection du langage mathématique dans la réalité des représentations.

Reformulation linguistique et projection

Cette reformulation à l'intérieur même de la langue mathématique et l'évocation mathématique dont j'ai parlé plus haut me semblent deux composantes importantes dans la compréhension en mathématiques. L'une vient-elle avant l'autre ?

Un enfant comme S. a su pénétrer le langage mathématique directement. Il semble bien qu'on puisse lui enseigner un concept nouveau directement au niveau du langage mathématique, sans négliger de lui demander d'en assurer lui-même les projections indispensables vers la réalité des représentations. Pour d'autres, il ne semble pas y avoir d'autres moyens que de présenter le geste concret dans le cas d'un auditif, ou le résultat de cette action dans le cas d'un visuel, en même temps ou juste avant d'introduire un nouveau « mot » mathématique. J'ai rencontré une élève qui n'a pu faire des divisions élémentaires sans fautes qu'à partir du moment où elle a pu décrire précisément *comment* on faisait un partage et non pas seulement ce qu'était un partage. Pour tous ces élèves, il semble sûr qu'un lien très fort avec la réalité des actions ou des images concrètes soit indispensable à l'utilisation autonome de la langue mathématique.

La langue mathématique doit devenir autonome

Cependant, dans tous les cas, il faut que la « langue mathématique » devienne autonome par rapport à la réalité des actions concrètes et des représentations. C'est ce que ressentait cet élève de 10 ans à qui on donnait des problèmes pouvant tous se résoudre en faisant une division, cette division pouvant être une division-partage ou une division-regroupement. Depuis deux semaines, je lui demandais de me dire s'il s'agissait d'un partage ou d'un regroupement avant de résoudre le problème.

Moi — Est-ce que c'est un partage ou un regroupement ?

Lui — C'est un partage. Mais écoute, on n'a qu'à faire la division, elle nous donne la réponse. Après, tu vois bien ce que c'est !

C'était dit avec un certain agacement, alors qu'au début, il avait trouvé difficile de faire cette distinction, puis avait été très heureux de la faire. Tout d'un coup, ça n'avait pas d'intérêt. Il pouvait travailler directement au niveau du langage mathématique, certain qu'il était de pouvoir en sortir quand il le voulait.

En obligeant les élèves à se référer constamment à une réalité concrète, on risque de les empêcher de développer une langue mathématique autonome. C'est même un des risques que l'on court à vouloir renvoyer toujours les élèves en difficulté à du matériel concret. Il faut aussi les faire travailler au niveau de l'écriture mathématique seule. Le travail fait « de tête » semble même particulièrement efficace.

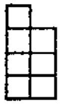
Une expression mathématique est toujours capable de se projeter dans des situations concrètes très différentes de celles qui ont permis la première association. La richesse des mathématiques provient en effet de cette multitude de concrétisations d'une même expression mathématique (voir exemple 1), ou au contraire des multiples expressions différentes qui peuvent se projeter dans une même réalité et en donner des évocations mathématiques différentes (voir exemple 2).

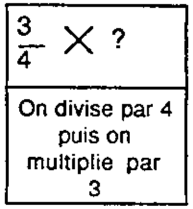
Exemple 1 : Voici quelques situations dans lesquelles peut se projeter l'écriture 3/4 :

1 

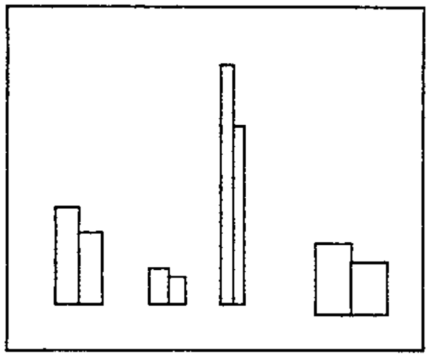
2 

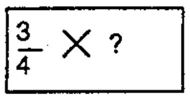
3 

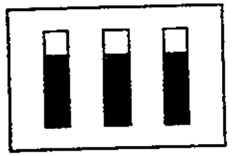
4 

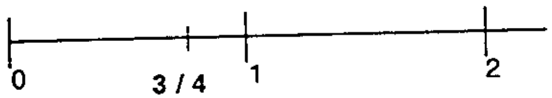
5 

6 

7 

8 

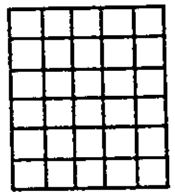
9 

10 

11 Proportion : 3 sur 4

12 Echange : 3 pour 4

Exemple 2 : Inversement, une représentation peut se trouver être le lieu de projection de propriétés mathématiques diverses :



On peut « voir » l'aire d'un rectangle, le produit 5×6 et 6×5, on peut « voir » 30 divisé par 6, ou par 5, ou les multiples de 5 ou de 6. En déformant le rectangle en rectangles de même aire, on « verrait » les diviseurs de 30. Bien sûr, seul le mathématicien « voit » toutes ces propriétés.

RÉSUMÉ : QUELQUES GESTES DE LA COMPRÉHENSION EN MATHÉMATIQUES

Évoquer et représenter des événements (actions, discours, textes lus, images, mouvements)

La plupart des enfants — pour ne pas dire tous — en difficulté en mathématiques ne savaient pas se représenter convenablement les événements extérieurs, que ce soit ce qui leur était dit, ce qu'ils lisaient ou voyaient, mouvements ou actions. Dans tous les cas il a fallu rétablir ce lien évocatif avec la réalité, à partir de leurs moyens d'apprendre. Leur apprendre à se représenter est toujours une phase particulièrement importante. Il faut en particulier apprendre à se représenter avec précision les actions (processus) qui donnent un sens concret aux opérations : regrouper, partager, réunir, extraire, comparer, etc.

Comprendre avec précision un certain nombre d'algorithmes

Un algorithme peut être rattaché directement à une opération arithmétique (multiplication, division, etc.). Il peut aussi être une méthode pour construire ou pour réaliser des opérations plus complexes. Au point de départ d'un « objet mathématique » il y a souvent un algorithme qu'il faut bien savoir appliquer. Une bonne évocation des « événements » peut permettre de comprendre « pourquoi » on utilise l'algorithme. Il n'est pas toujours nécessaire de savoir pourquoi on suit un algorithme, il suffit parfois de savoir comment. Il est même souvent nuisible de mélanger le « pourquoi » et le « comment ». La connaissance d'un algorithme ne constitue pas une compréhension des mathématiques, elle en est souvent un point de départ.

Apprendre à pratiquer l'évocation mathématique

A partir de là, le contact rétabli avec la réalité, il est possible de commencer à faire pratiquer une « évocation mathématique », c'est-à-dire une projection d'une propriété mathématique dans une représentation ou une situation concrète. Cela peut se faire en partant d'un algorithme soigneusement défini et qui ne va pas servir seulement à faire un simple calcul, mais aussi à interpréter une réalité concrète. Chaque nouvelle projection va enrichir l'objet mathématique, qui va se définir progressivement en partie grâce à ces projections concrètes. Un geste particulièrement efficace de compréhension est l'invention d'une concrétisation particulière d'un objet mathématique.

Distinguer un objet concret et un objet mathématique

En même temps, on commence à apprendre aux élèves à considérer une représentation mathématique concrète comme une représentation possible et particulière d'un objet mathématique qui ne se résume jamais à cette représentation. On peut ainsi éviter de « chosifier » les objets mathématiques, tendance qu'ont bon nombre d'enfants en difficulté. La pratique de l'évocation mathématique est une aide précieuse pour faire cette distinction. Pour diriger leur intention dans ce domaine, on peut faire sentir le plus tôt possible la différence entre le « regard du spectateur » et le « regard du mathématicien », l'un reconnaissant des objets concrets, l'autre projetant une structure mathématique sur une représentation concrète.

Reformuler soi-même des expressions de la langue mathématique

Il est indispensable aussi de développer une autonomie de l'utilisation de la langue mathématique par rapport aux situations concrètes. Cela peut être fait en demandant aux élèves de reformuler toute expression mathématique sous une autre forme. C'est un travail de *réexpression* de ce qui a pu être donné sous une certaine forme. Il est important que les élèves fassent eux-mêmes le travail de réexpression. C'est en transformant les expressions mathématiques que l'on prend conscience de leur sens et que l'on fait des liens avec d'autres expressions mathématiques. On obtient ainsi une compréhension « linguistique », qui doit être complétée par des projections variées dans la réalité des représentations concrètes.

Apprendre à pratiquer l'évocation mathématique, distinguer un objet concret et un objet mathématique, reformuler soi-même des expressions de la langue mathématique sont des moyens d'aller au-delà de la forme pour rejoindre le sens.

Tenir compte de ce que sont les mathématiques

Comprendre les mathématiques n'est pas une activité totalement séparée de la compréhension en général. Cependant les mathématiques ont des caractéristiques particulières dont il faut tenir compte, sinon on risquerait de faire faire aux élèves des gestes mentaux qui seraient une « caricature de compréhension ». Je crois que les mathématiques se caractérisent par l'existence de trois niveaux (objets mathématiques, langue mathématique, représentations concrètes) et des relations entre ces trois niveaux.

Amener les élèves à se donner le projet de comprendre les mathématiques

L'intervention auprès des élèves a non seulement pour but de les amener à évoquer et à se représenter des événements, à comprendre avec précision des algorithmes, à apprendre à pratiquer l'évocation mathématique, à distinguer objet concret et objet mathématique et à reformuler eux-mêmes des expressions mathématiques, mais doit aussi les amener à devenir conscients de ces moyens de comprendre les mathématiques et, bien plus, d'avoir le projet de pratiquer ces gestes pour comprendre. C'est cette intention qui va les amener à changer leur attitude en mathématique et leur permettre d'améliorer leur compréhension.

Connaître les moyens d'apprendre avant d'enseigner

Enfin, il faudrait éviter que la « gestion mentale » devienne une méthode susceptible d'applications mécaniques et simplistes. Ce serait oublier qu'elle doit permettre une approche qui prenne d'abord en compte l'indivualité de chaque élève et qui, avant d'imposer un savoir, se préoccupe surtout des moyens d'apprendre de l'élève, moyens qui restent toujours variés et complexes.

Une expérience de méthodologie en gestion mentale dans le cadre de la licence en droit

Louis Rozès

Professeur agrégé de droit privé et de sciences criminelles à la faculté de droit de l'université des sciences sociales Toulouse-I, enseigne le droit civil, le droit commercial et le droit du travail dans le cadre de la licence en droit et en doctorat.
Il anime des séances de méthodologie qui font appel à la gestion mentale et qui sont proposées aux étudiants en droit ; il organise des cycles de formation à la gestion mentale à l'intention des enseignants de l'université et se propose de développer la gestion mentale dans le cadre des facultés de droit.

I — Cadre de l'expérience

L'expérience de méthodologie en gestion mentale que l'on va décrire s'est déroulée dans le cadre de la licence en droit à la faculté de droit de l'université des sciences sociales Toulouse-I[1], et plus précisément à propos du cours annuel de droit civil qui y est dispensé avec, pour programme, les contrats civils et commerciaux. Ce cours magistral réunit environ 320 étudiants pendant trois heures hebdomadaires ; c'est un cours à option, mais il est très largement suivi, puisque les trois quarts des étudiants s'inscrivent dans cette matière ; il fait également l'objet de séances de travaux dirigés au rythme d'une séance hebdomadaire d'une heure trente[2]. Le cours en amphithéâtre ne permettant guère une expérience méthodologique poussée en

1. Université des sciences sociales Toulouse-I, place Anatole-France, 31042 Toulouse cedex, tél. : 61 63 35 00.
2. Elles sont assurées par des maîtres de conférences, allocataires d'enseignement et de recherche et par des chargés de travaux dirigés.