Alain Taurisson
Ancien professeur à l'université du Québec à Montréal

Ce que la gestion mentale peut apporter à la didactique des mathématiques

La gestion mentale

La gestion mentale se place au niveau de l'activité mentale, en tente une description, recherche les conditions dans lesquelles cette activité peut se développer et essaie d'instruire celui qui apprend de ce qu'il peut faire en toute conscience pour maîtriser et rendre plus efficace son activité intellectuelle.

1 – Le concept clé de la gestion mentale est celui de « projet de sens ». L'être humain est un être de sens et son rôle est de découvrir le sens des êtres, des choses et de lui-même évocation. Quand l'être humain est en « projet de sens », il évoque la réalité.

2 – L'évocation est un autre concept clé de la gestion mentale. Il s'agit d'un retour que la conscience opère sur une perception pour constituer un « objet mental » qui existe en dehors de la présence de l'objet de perception qui l'a fait naître. C'est parce qu'il y a « projet de donner du sens » à un objet de la réalité que la perception est reprise sous forme d'évocation. À partir de l'objet évoqué, l'être humain est capable, non seulement de mémoriser, mais aussi de comprendre, d'imaginer. Ainsi, le processus d'évocation, structuré par le projet de sens, est au centre de toute démarche intellectuelle.

3 – Il faut donc décrire ce processus d'évocation, ainsi que les conditions de son émergence. Cette description se fait, en partie, à partir de l'introspection. La démarche de la gestion mentale est donc résolument placée sur le plan du « vécu », et en particulier des « vécus de conscience » des élèves, de chaque élève avec ses particularités et non pas d'un élève générique.

La didactique des mathématiques

Pour préciser la démarche de la didactique, nous allons partir d'un article fort intéressant de N. Rouche[2]. Il cite A. Treffers qui décrit quatre façons d'enseigner les mathématiques : ce dernier commence par distinguer deux points de vue, le point de vue horizontal et le point de vue vertical.

1 – le point de vue horizontal s'appuie sur les réalités, va chercher les mathématiques dans des contextes divers. Il utilise les constructions, les manipulations, et ce que N. Rouche appelle les perceptions ;

2 – le point de vue vertical s'appuie sur les théories, les structures, la logique, la déduction, la rigueur.

En croisant ces deux points de vue, on obtient quatre « façons d'enseigner », que l'on trouvera sur ce tableau :

	Horizontal	Vertical
Mécanique	–	–
Empiriste	+	–
Structuraliste	–	+
Réaliste	+	+

On peut décrire de la façon suivante ces quatre types d'enseignement :

1 – l'enseignement mécanique, qui consiste à faire des calculs sans liens avec la réalité, à appliquer des règles, etc ;

2 – l'enseignement empiriste : on manipule beaucoup, sans prendre le temps de structurer ;

2. *Bulletin de l'APMEP*, février 95, n° 397, p. 351.

3 – l'enseignement structuraliste : on part de la théorie, du langage, on ne fait que peu de liens avec le contexte. Le discours magistral s'applique fort bien avec ce type d'enseignement ;

4 – l'enseignement dit « réaliste » : c'est un enseignement qui se soucie à la fois des contextes problématiques et de la théorie, qui amène les élèves à saisir les liens entre chaque structure mathématique et les questions qui lui ont donné naissance ou qui en sont les domaines d'application. Et N. Rouche conclut : cet enseignement est « le bon ».

Reprenons cette phrase : c'est un enseignement qui se **soucie** à la fois des contextes problématiques et de la théorie, qui **amène** les élèves à **saisir** les liens entre chaque structure mathématique et les questions qui lui ont donné naissance.

Une telle phrase exprime une intention avec laquelle chacun ne peut qu'être d'accord, mais comment fait-on dans la pratique pour se « soucier » à la fois des contextes problématiques et de la théorie ? Comment, surtout, va-t-on faire pour que cela ne soit pas qu'un souci pour l'élève, mais qu'il sache comment faire ce lien ? Comment fait-on mentalement pour faire ce lien entre les « contextes problématiques » et la « théorie » ?

Dans la seconde partie de la phrase, N. Rouche donne une voie : **il faut amener les élèves à saisir ces liens.**

La façon habituelle en didactique d'amener quelqu'un à « saisir des liens » consiste soit à le mettre dans une situation où il semble normal qu'on fasse ces liens, soit à lui expliquer ou tenter de lui faire voir les liens à connaître.

L'approche de la didactique

Dans tous les cas on agit sur l'élève pour qu'il agisse de façon à ce qu'il fasse mentalement ce qu'il faut. On a là le principe pédagogique général issu de la didactique.

Observons que, dans cette optique, on ne se préoccupe pas directement de ce qu'il faut faire mentalement. On pense simplement qu'en construisant les bonnes situations, en amenant les élèves a y participer, et en explicitant ce qui doit être compris, une bonne partie des élèves va réussir à établir les liens.

L'approche de la gestion mentale

La gestion mentale tente une autre approche : **on instruit l'élève de ce qu'il faut faire mentalement pour établir les liens à connaître.**

Pour des raisons que nous expliciterons, il est quelquefois difficile de le faire directement. On peut alors agir sur l'élève pour lui faire prendre conscience du travail mental qu'il doit effectuer, mais même dans ce cas, on a, comme enseignant, une idée assez précise de ce travail mental. Dans les deux cas, le but de l'enseignant est de susciter une activité mentale précise, descriptible et différenciée selon les individus.

Pour pouvoir guider un élève sur le travail mental à effectuer, il faut tenter de connaître ce travail mental, et donc commencer par définir les diverses composantes des mathématiques à partir de la façon de les évoquer.

Les composantes des mathématiques, du point de vue de l'évocation

1 – Les objets mathématiques sont des objets purement mentaux. Ils n'ont donc d'existence qu'à travers l'évocation. Le point dessiné sur le tableau révèle le « point mathématique », qui n'est qu'une idée. Le parallélogramme que l'on voit peut aider à se représenter le parallélogramme mathématique qui n'est qu'un ensemble de relations entre des côtés, des angles ou des directions. **Un objet mathématique est un élément organisateur de l'évocation, propre aux mathématiques.**

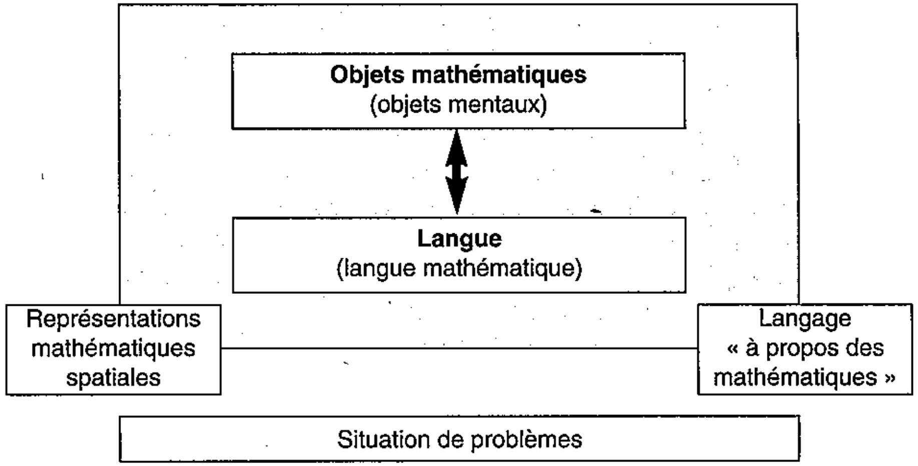
2 – La langue mathématique est une véritable langue écrite qui a sa syntaxe propre et qui ne décrit parfaitement que les objets mathématiques. Une des difficultés de son apprentissage vient de ce qu'elle ressemble souvent au français et qu'elle donne l'impression fausse qu'elle peut s'appliquer aussi à des objets concrets, d'où de multiples faux-sens et incompréhensions. La langue mathématique est une véritable langue seconde qui doit être apprise comme telle. Le sens de cette langue provient de sa structure propre ou des objets mathématiques qu'elle décrit.

3 – Le langage à propos des mathématiques est la langue utilisée quand on parle de mathématique sans se situer à l'intérieur des mathématiques elles-mêmes. Ce langage peut constituer un intermédiaire entre la langue mathématique, le français courant, les situations de problèmes, les objets mathématiques. Il sert de transition entre le connu et le nouveau.

4 – Les représentations mathématiques spatiales. Ce sont des représentations graphiques qui « aident à penser » : des points, des flèches, des schémas, toute représentation qui n'est pas seulement figurative. Une représentation mathématique peut constituer une première abstraction de ce qui est concret ou au contraire concrétiser une idée ou un objet mathématique. Comme le langage mathématique, la représentation mathématique permet une transition entre l'objet mathématique et l'objet concret.

5 – La situation de problème est une situation plus ou moins réelle sur laquelle peut s'exercer l'activité mathématique.

On peut représenter ces cinq éléments de la façon suivante :



Du point de vue du traitement mental, les objets mathématiques n'ont d'existence que mentale. Ils n'existent qu'à l'intérieur de la conscience. Ce sont des concepts et ils permettent de structurer l'évocation du mathématicien d'une façon particulière. La langue mathématique renvoie exclusivement à ces objets mentaux. Les objets mathématiques et la langue mathématique constituent la science mathématique, comme on la trouve exposée dans un traité.

Les « représentations mathématiques » et le « langage à propos des mathématiques » ont un rôle d'intermédiaire entre des objets purement mentaux et des objets concrets, dans un sens ou dans l'autre. Ils ne font pas partie à proprement parler des « mathématiques », mais vont servir d'outil à l'individu pour se construire cette évocation particulière aux mathématiques. Du point de vue de l'évocation, ces représentations doivent donc conserver ce statut de médiateur et être toujours évoquées en relation avec un objet mental ou une situation réelle et non pour elles-mêmes.

Enfin la situation de problèmes est extérieure à l'individu. Elle est le lieu où peut s'exercer l'activité de celui qui fait des mathématiques. L'élève devra donc l'évoquer pour l'intérioriser avant de pouvoir la traiter mathématiquement.

Chaque niveau doit être soigneusement distingué par les élèves, car il est traité d'une façon différente, donc fait l'objet d'un projet différent. C'est la précision de ce projet qui donnera d'abord un sens à l'activité de l'élève.

Si les mathématiques à proprement parler ne concernent que les objets mathématiques et la langue mathématique, les représentations mathématiques et le langage « à propos des mathématiques » sont des outils qui permettent de les approcher ou de les utiliser pour résoudre des problèmes. **Apprendre les mathématiques, c'est tisser des liens entre tous ces éléments à partir du processus évocatif. C'est aussi distinguer chaque niveau.** Les mathématiques naissent d'une rupture entre tout ce qui est « concret » et tout ce qui est « objet mental ». Cette rupture, pour se faire, doit être consciente.

Si l'on reprend le tableau proposé par N. Rouche et les types d'enseignement qui en découlent, on voit que les trois premiers types d'enseignement dont il parle ne se situent jamais au niveau des liens entre les cinq niveaux que nous proposons. Seul le dernier se place au niveau des relations entre ces niveaux. Nous serons moins absolu que N. Rouche affirmant que le quatrième enseignement est le bon. Nous dirons plutôt que cela dépend des possibilités d'évocation de chacun. L'erreur serait de vouloir à tout prix contraindre un élève à passer par un chemin que l'on définirait pour lui sans lui. Certains élèves vont pouvoir se placer au niveau de la langue mathématique pour aller ensuite vers les applications alors que d'autres vont naturellement utiliser le chemin inverse. C'est à cela qu'il faut être attentif, sachant qu'il faudra bien faire les liens à un moment ou à un autre.

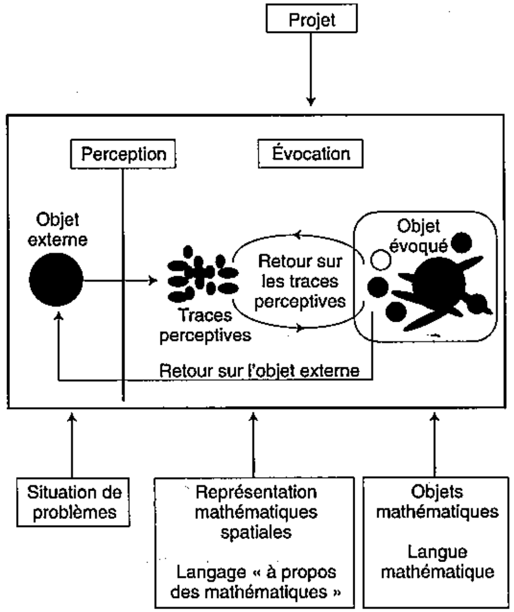
Un problème se pose tout de suite : quel est le travail mental qui peut conduire à la construction d'un objet mental ?

Déterminer et respecter où se situe la pensée de l'élève
Un outil : le langage intérieur

Sur le schéma ci-après nous avons tenté de représenter le processus évocatif. L'objet externe laisse des traces perceptives qui sont reprises par le processus d'évocation, lui-même déterminé par le « projet de donner un sens » à ces traces perceptives. Il en résulte la constitution d'un « objet mental » placé dans un certain espace, représenté sur le graphique par l'écran quadrillé. Le retour sur les traces perceptives se fait par l'intermédiaire de ce que j'ai appelé « le langage intérieur », fait d'images et de mots qui ont directement un sens.

L'espace mental dans lequel est placé l'objet évoqué peut être de nature spatiale ou temporelle, selon les cas. Le rôle du « langage intérieur » est de réaliser cette intégration.

Sur le graphique ci-après, nous avons situé les objets intervenant dans l'apprentissage des mathématiques. Les « représentations mathématiques » et le « langage à propos des mathématiques » peuvent intervenir comme aide au langage intérieur pour donner du sens.



En particulier, le langage intérieur va permettre de situer l'objet évoqué soit dans l'espace soit dans le temps, et cela selon que l'individu pense de façon habituelle dans l'espace ou dans le temps.

Exemple : le sens de la soustraction

Voici un petit problème faisant intervenir la soustraction :

Jean avait des billes. Il en a gagné 15. Il en a maintenant 22.
Combien Jean avait-il de billes ?

Ce problème peut être évoqué dans le temps ou dans l'espace.

Donnons un exemple possible d'évocation dans le temps.

Pour celui qui évoque dans le temps, l'association entre la soustraction et le verbe d'action « enlever » est naturelle. Le problème posé s'adapte mal à une utilisation directe de la soustraction, car on cherche le nombre de billes au début, et on n'enlève pas, mais on ajoute. Il faut donc trouver un moyen de faire le lien entre le problème et le processus « enlever » qui fait partie du « langage intérieur » de ce type d'élève.

Il faut commencer par déterminer une représentation du temps qui va permettre d'accueillir l'énoncé du problème. On peut procéder de la façon suivante :

– Imaginons Jean arrivant dans cette pièce. Il a des billes dans sa poche. On va se faire une photo de Jean arrivant dans la pièce.

– Ensuite Jean va dans le milieu de la pièce et on lui donne 15 billes. Il prend ces billes. On se fait une photo de Jean qui prend les billes qu'il vient de gagner.

– Maintenant Jean sort de la pièce. On se fait une photo de Jean sortant de la pièce.

On a donc trois photos de Jean et ces photos sont ordonnées dans le temps. Chacune de ces photos représente une action.

On peut même remonter le temps :

– Jean sort de la pièce. On sait qu'il a 22 billes.

– Auparavant, il en avait gagné 15. Encore avant, il avait un certain nombre de billes. Si on *enlève* les billes gagnées, on retrouve les nombre de billes que Jean avait.

On vient de retrouver le langage intérieur de l'élève. Cela a été possible parce qu'il y avait un repère temporel, marqué par trois images qui marquaient trois instants essentiels.

Muni de ce repère, l'élève pouvait remonter le temps et retrouver le processus « enlever » associé à la soustraction.

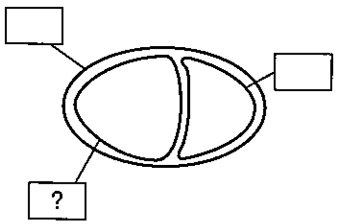
La création de ce repère mental temporel est essentiel à la compréhension de ce problème pour un élève qui se situe dans le temps pour penser.

Qu'en est-il d'un enfant qui se placerait dans un repère spatial ?

Pour l'élève qui se place dans un repère spatial ; il faut lui donner mentalement un lieu dans lequel il pourra penser son problème. On va lui demander de visualiser la poche de Jean. Dans cette poche, il y a des billes. On ne sait pas combien il y en a. On peut imaginer que ces billes sont rouges.

– On donne 15 billes à Jean. Imaginons que ces billes sont bleues.

– Il y alors dans la poche de Jean des billes bleues et des billes rouges. Il y a 22 billes.



On voit donc en même temps les billes bleues, les billes rouges et l'ensemble des billes. On a donc une représentation ensembliste du problème.

Un enfant qui se situe dans un lieu pour penser la soustraction n'a pas la même définition de cette opération. Pour lui, la soustraction est l'opération qui permet, quand on connaît le tout et une partie, de trouver l'autre partie.

Il n'y a donc pas d'association universelle de la soustraction et d'un processus. Il y a possibilité d'associer la soustraction avec une action (ici enlever), ou avec une représentation imagée (voir ci-dessus). C'est l'élève qui va se placer dans une structure ou dans l'autre. Il sera très difficile d'expliquer en terme d'espace ce qu'un élève conçoit en terme de temps et réciproquement. Il faut donc savoir où l'élève se situe avant de penser à l'aider pour avoir une chance de l'y rencontrer.

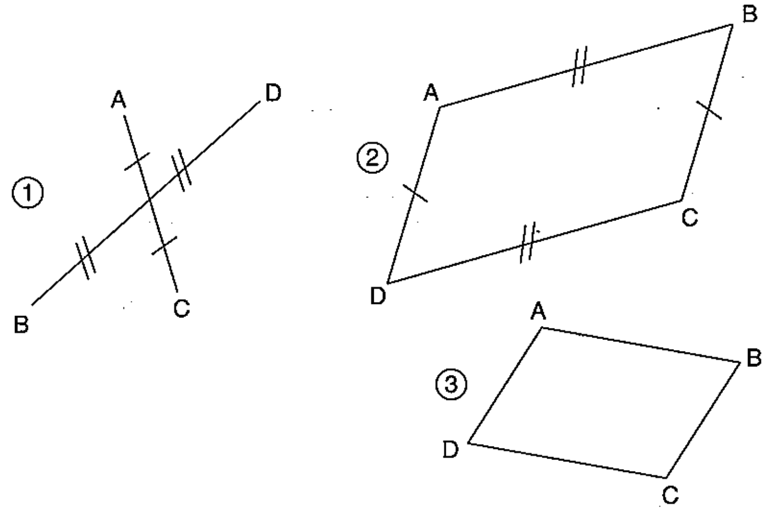
Le langage intérieur est multiple. Il doit cependant être construit pour permettre l'intégration d'une nouvelle connaissance aux anciennes.

La construction d'un concept
Comment construire un objet mental ?

L'objet mental n'est pas directement accessible, il faut le construire. L'évocation dirigée par un projet particulier est un moyen d'y accéder.

• ***Possibilité 1. Un projet particulier d'évocation***

L'objet mental sera obtenu par la définition d'un projet évocatif précis. Voici un exemple.



Le sens que l'on va donner aux trois figures précédentes dépend directement du projet que l'on a en les observant.

– **Si mon projet d'évocation est celui d'un mathématicien,** je vais « voir » dans les figures ① et ② un parallélogramme, alors que je ne pourrais rien voir de tel dans la figure ③.

– **Si je regarde ces schémas avec l'œil d'un non-mathématicien,** je vais voir un parallélogramme dans les cas ② et ③, mais pas dans le cas ①.

Dans le premier cas, on dira que je regarde avec l'œil du mathématicien, et dans le deuxième cas, que je regarde avec un œil naïf.

Un élève instruit et entraîné à ces deux regards, c'est-à-dire aux projets différents, comprendra que faire une démonstration, c'est voir avec l'œil du mathématicien ce que l'œil naïf à peut-être déjà vu, ou n'a pas encore vu. *Il ne s'agit pas de faire des démonstrations parce qu'on n'est jamais tout à fait sûr de ce qu'on voit, mais parce que le projet est complètement différent.* On ne doit pas se défier de ce regard naïf, on peut même s'en servir, car c'est lui qui met souvent sur la voie ; mais il s'agit de voir finalement avec ce regard de mathématicien qui structure de manière particulière notre évocation. Les élèves acceptent fort bien cette distinction qui clarifie le but de la démonstration en en précisant le projet du point de vue évocatif.

Quel que soit le domaine des mathématiques, il y a un projet particulier au mathématicien. Quand on connaît ce projet, le reste suit facilement parce qu'on a accès au sens même de son action.

Enseigner les mathématiques, c'est d'abord rendre explicite ce projet du mathématicien, les apprendre c'est le mettre en œuvre.

• ***Possibilité 2. De l'évocation au concept***

Cette fois, l'objet mental va naître de la confrontation d'objets différents évoqués, dans le but de les comparer pour faire apparaître des similitudes, des différences, des relations.

Exemple : la notion de proportionnalité revient fréquemment en mathématiques. Elle se traduit souvent par une forme ou une autre de « règle de trois ». Il faut bien admettre que le concept est souvent mal assimilé par les élèves de tout âge.

Voici comment, en posant le problème en terme de gestion mentale, on peut aborder cette question.

On commence par expliquer, en termes compréhensibles par les élèves auxquels on s'adresse, le principe précédent. Cela a peut-être déjà été fait, et il suffit de faire un rappel. Il s'agit toujours d'instruire les élèves sur la nature du travail mental qu'ils ont à faire pour qu'ils puissent en faire un projet.

Principe : le sens provient des objets évoqués et non des objets concrets

1 – Il faut donc faire évoquer des objets qui vont permettre de dégager la notion de proportionnalité.

2 – Ces objets étant évoqués, il faudra les comparer jusqu'à ce qu'apparaissent des similitudes, des différences, des relations.

3 – Il faut tenir compte du fait que les élèves peuvent pratiquer une évocation différente, et qu'en particulier certains vont évoquer plutôt dans l'espace et d'autres plutôt dans le temps.

4 – Pour qu'un objet mathématique se forme, c'est-à-dire un principe organisateur, il faut que le nombre d'objets évoqués dans l'espace ou le temps soit assez grand pour qu'il y ait vraiment une situation à organiser.

Naturellement ce qui suit n'est pas un modèle, mais simplement un exemple.

1 – Évocation d'une situation de départ

Nous allons partir d'un tableau relativement complexe.

2	---------	**3**
4	---------	**6**
6	---------	**9**
12	---------	**?**
9	---------	**?**
10	--------	**?**
?	---------	**1,5**
1	---------	**?**
?	---------	**1**
100	---------	**?**
?	---------	**100**

Avant de commencer tout travail de réflexion sur ce tableau, nous devons le faire « évoquer ». La mémorisation à court terme est une façon pratique d'obliger à l'évocation. On partage le tableau en deux parties, la première devant être mémorisée en 15 secondes.

2	---------	**3**
4	---------	**6**
6	---------	**9**
12	---------	**?**

On vérifie que la mémorisation a bien été effectuée par tous. Au besoin on recommence.

2 – Toute évocation entraîne une certaine organisation

Pour faire cette mémorisation à court terme, la plupart des élèves auront déjà fait des liens entre tous ces nombres. Il faut expliciter ces liens. On verra, à travers cette discussion, que certains ont « vu » des relations par rapprochement spatial des nombres et que d'autres ont dû les examiner successivement, ligne par ligne. On a là deux façons d'évoquer cette situation.

Certains élèves auront établi des relations additives, d'autres des relations multiplicatives. Nous précisons que nous cherchons les relations multiplicatives.

On en déduit la valeur qui doit être mise en place du « ? ». Il y a plusieurs façons de trouver cette valeur. Ces diverses méthodes sont données par les élèves. Elles sont décrites et représentées graphiquement. Elles deviennent un principe organisateur du tableau.

3 – Comparaison avec la situation initiale (évoquée) et la situation nouvelle

Ensuite on demande aux élèves de compléter le tableau :

2	---------	3
4	---------	6
6	---------	9
12	---------	?
9	---------	?
10	---------	?
?	---------	1,5
1	---------	?
?	---------	1
100	---------	?
?	---------	100

Le but de ce travail est de mettre en œuvre le « principe organisateur » évoqué dans la première partie de l'activité. Là encore, il y a de nombreuses façons de compléter ce tableau. Par exemple le 1 de la ligne de gauche peut être obtenu à partir du 2, du 4, du 6, du 10, etc. Le point d'interrogation en face du 1 peut donc être remplacé par 3/2, 6/4, 9/6, 15/10, etc., qui sont donc des façons différentes de représenter le même nombre. On obtient aussi des pourcentages, des écritures décimales, etc.

4 – Construction de représentations mathématiques exprimant des structures déjà évoquées

Parce que les relations précédentes ont été évoquées et sont mentalement présentes, on peut maintenant demander d'interpréter les schémas suivants en posant des questions telles que :

- quelle est la signification des flèches ?
- quelle structure ces flèches expriment-elles ?
- peut-on ajouter d'autres flèches ? Exprimer en français leur signification.

Une telle structure graphique est une représentation mathématique qui exprime une structure numérique déjà intériorisée, mais non complètement exprimée.

2	---------	3
4	---------	6
6	---------	9
12	---------	?
9	---------	?
10	---------	?
?	---------	15
1	---------	?
?	---------	1
100	---------	?
?	---------	100

2	---------	3
4	---------	6
6	---------	9
12	---------	?
9	---------	?
10	---------	?
?	---------	1,5
1	---------	?
?	---------	1
100	---------	?
?	---------	100

2	---------	3
4	---------	6
6	---------	9
1	---------	?
9	---------	?
10	---------	?
?	---------	15
1	---------	?
?	---------	1
100	---------	?
?	---------	100

Les flèches suggèrent de nouvelles opérations : quelles sont ces opérations ?

C'est parce que les relations entre les nombres ont été évoquées, et sont donc présentes mentalement, que l'on peut se consacrer à l'expression des liens. C'est pour cela que la signification des flèches va pouvoir apparaître.

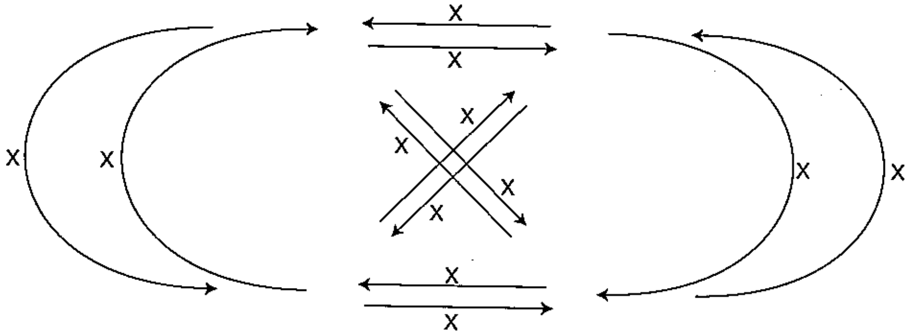
5 – Les calculs expriment des structures évoquées

Remarquons que l'on peut aborder non seulement la règle de trois, mais les fractions équivalentes, les pourcentages et de nombreux procédés de calculs.

Cherchons maintenant comment représenter les résultats obtenus : il s'agit de se donner un moyen d'évoquer la structure complexe précédente.

On commence par évoquer ce qui a été fait : chacun refait vivre mentalement ce qui s'est passé, sous une forme qui lui convient. Il faut consacrer à cette évocation le temps qu'il faut.

Tout cela étant mentalement présent, on peut montrer le schéma suivant :



Quel rapport avec ce qui a été fait ? Quel est le sens de toutes ces flèches ? En faisant des allers et retours entre la situation vécue et la représentation graphique présentée, et ce à partir de ce qui a été évoqué, cette structure prend un sens, non pas en elle-même, mais comme moyen d'interprétation et de représentation de ce qui a été fait.

Cette représentation schématique sera traduite verbalement par chaque élève, à sa façon. On vérifiera le bien-fondé de chaque traduction.

Cette schématisation contient plusieurs procédés de calculs. Si quatre nombres sont placés de façon analogue à ceux du tableau :

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

l'élève aura toujours présent dans sa tête que cela n'est qu'un extrait d'un tableau beaucoup plus grand, que l'on peut toujours enrichir.

Notons que cette notation est beaucoup plus souple que la notation fractionnaire traditionnelle. Sa symétrie laisse possible toutes les formes de calcul traditionnel.

On obtient en particulier que « le produit des extrêmes est égal au produit des moyens » (a.d = c.b), que le « quotient des nombres de droite égale le quotient des nombres de gauche (a/c = b/d) », que « d = c × (b/d) », etc. Tous ces procédés de calcul, et tous les autres qu'on peut tirer de la structure générale du tableau, ne sont que des façons différentes d'exprimer un principe organisateur unique beaucoup plus général que chaque calcul pris séparément. Le « tableau » et toutes les relations évoquées qui lui sont attachées deviennent une représentation mentale de ce concept, que l'on peut nommer : la proportionnalité.

6 – Application de l'objet mathématique aux problèmes

Viendra ensuite le moment de rendre l'objet mathématique opérationnel, c'est-à-dire de l'utiliser pour résoudre des problèmes.
Dans un premier temps, avant d'aborder un problème, la situation qui a servi à dégager le concept sera évoquée : on se souviendra du tableau, des flèches, de la représentation mathématique qui en a été tirée. On pourra poser quelques questions par écrit pour aider à ce retour sur ce qui a été fait. Les élèves pourront fouiller dans leurs notes. Là encore, on prend tout le temps nécessaire à cette remontée de ce qui a été vu.

Par la suite, il ne sera pas nécessaire d'évoquer le tableau de départ, mais seulement une représentation mathématique de ce tableau.

Les élèves vont alors prendre contact avec ce problème qui fait intervenir des proportions. Ils devront reconnaître qu'il s'agit d'un problème faisant intervenir une ou des proportions par évocation du problème[3] et comparaison avec des problèmes déjà vus. On rappellera, en choisissant des termes du niveau du public auquel on s'adresse, que **comprendre, c'est le résultat d'un projet qui consiste à évoquer, pour les comparer, d'une part l'objet de perception nouveau à comprendre[4] et d'autre part des objets déjà évoqués, représentés par des mots, des schémas, des images symboliques[5], jusqu'à ce qu'apparaissent des similitudes, des différences, des relations causales, etc.**

Ce rappel sur le geste de compréhension sera fait chaque fois qu'on abordera une situation dans laquelle il faudra comprendre.

Cela fait, les élèves vont se rapprocher de l'outil dont ils disposent pour résoudre le problème, c'est-à-dire qu'ils vont reconstituer un début de tableau et utiliser la meilleure technique de calcul, compte tenu des nombres en présence. Cette démarche devient consciente et va se constituer en projet.

3. Voir ci-après la partie consacrée à l'évocation de l'énoncé d'un problème.
4. Ici le problème nouveau à résoudre.
5. D'autres problèmes déjà résolus.

Dans toute la démarche précédente, on s'assure à chaque étape qu'une évocation nouvelle peut s'appuyer sur une évocation passée qui permet d'en donner une interprétation : c'est l'essence même de la compréhension.

De plus, on crée ainsi une représentation qui peut être évoquée pour travailler sur les fractions, les pourcentages, les règles de trois. C'est parce qu'on a choisi une situation assez générale comme évocation initiale que cela est possible. Si l'on considère certaines propriétés des fractions (par exemple que si a/b = c/d, alors a/c = b/d). Cette propriété apparaît directement dans le tableau initial et dans l'évocation qui en a été faite.

La gestion mentale permet d'affronter tout de suite les mathématiques

Dans l'exemple précédent, on propose aux élèves de partir de l'évocation d'un ensemble de nombres proportionnels pour en dégager une structure complexe à partir de l'évocation. On se trouve à limiter ainsi au minimum la transposition didactique qui est souvent source d'incompréhension. On plonge les élèves tout de suite dans une « pratique mathématique » non tronquée. Dans la mesure où c'est par l'évocation que l'on donne du sens, une évocation dirigée dans le sens de l'évocation du mathématicien permet au plus grand nombre d'affronter des situations mathématiques sans doute simples, mais réelles.

La recherche du sens

La démarche précédente est déterminée par le travail mental que l'élève peut accomplir et par la conscience qu'il en a. On tente, à chaque étape, de le renseigner sur ce travail avant qu'il ait à l'effectuer. L'élève a alors un projet qui dirige son activité mentale et lui donne son sens. On s'assure que ce travail est possible, donc que le travail d'évocation préalable a été fait.

L'activité mathématique, la résolution de problèmes

N. Rouche donne trois phases de l'activité mathématique, le « triex » : explorer, extraire, expliquer[6].

1 – une phase d'exploration ;

2 – une phase d'extraction, l'attention se porte sur un phénomène particulier et l'on extrait un énoncé du lot des observations ;

3 – enfin, on démontre l'énoncé.

6. Stein, 1987.

Ces phases sont non successives. N. Rouche écrit que :

> « Le mérite du triex est, face à une consigne donnée, d'en provoquer une analyse qui montre quels registres de la pensée mathématique elle est susceptible de solliciter. On peut se poser des questions du genre : quelles sont les variantes significatives, selon qu'elles sont plus ou moins prises en charge par les élèves ou le professeur ? Les élèves trouvent-ils dans la phase d'exploration des sources d'argument utiles pour l'explication ? Dans quel schéma la motivation à démontrer est-elle la plus grande ?
> Ces questions sont celles que l'on se pose pour décrire les façons d'aborder et de résoudre un problème. »

N. Rouche les pose en terme de comportements que l'on peut observer de l'extérieur et non pas en termes de ce qui peut être fait mentalement pour résoudre un problème. Ce que l'enseignant peut donc faire, c'est construire des situations dans lesquelles ces comportements devraient se produire normalement, sans pouvoir donner des conseils quant au travail mental à effectuer pour résoudre un problème.

Prenons un autre exemple : Polya est beaucoup plus qu'un didacticien. Il s'est employé à rechercher une méthode générale de résolution des problèmes en mathématiques. Comment décrit-il le processus de résolution de problèmes ? Il en donne d'abord une définition :

> « Un problème est une situation dont la solution exige de rechercher de manière consciente une certaine ligne d'action en vue d'atteindre un but clairement conçu, mais non immédiatement accessible. Résoudre un problème, c'est trouver cette ligne d'action. »

Il poursuit :

> « La solution de très nombreux problèmes consiste essentiellement en une procédure, une ligne d'action, un schéma d'opérations articulées, un *modus operandi*. »

Il précise aussi :

> « Celui qui veut résoudre un problème doit connaître son esprit, et un athlète doit connaître son corps de la même façon qu'un jockey connaît ses chevaux. »

Nous ne pouvons que partager ce point de vue, mais Polya ne donne aucun moyen de « connaître son esprit ».

Il souligne aussi un élément essentiel dans la résolution de problème :

> « Un élément essentiel d'un problème est le désir, la volonté et la résolution prise de le résoudre. Un problème que vous êtes supposé résoudre, dont vous avez compris l'énoncé parfaitement bien, n'est pas encore votre problème.
> Cette volonté de résoudre est un désir productif. »

Ce désir productif est-il autre chose que ce qu'on appelle le « projet » en gestion mentale ?

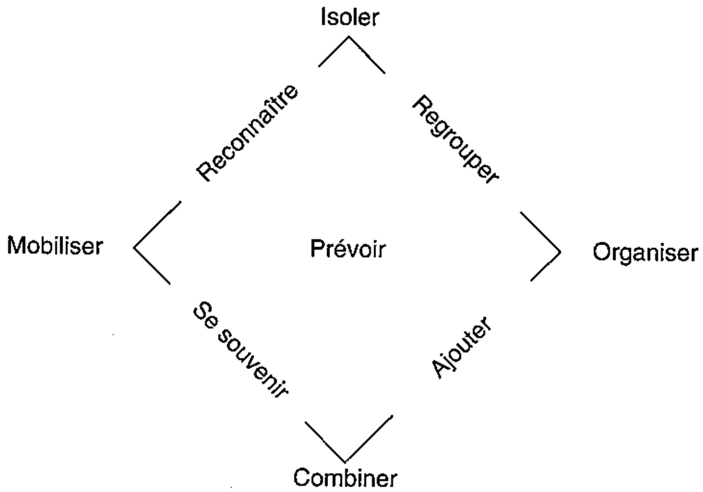
Polya insiste sur la nécessité d'anticiper les grandes lignes de la solution. Il décrit ensuite la démarche de résolution :

> « Finalement, par une démarche d'approximation successive, le chercheur peut parvenir à la réponse exacte, à un plan approprié. »

Nous ne cherchons pas une solution n'importe où, mais dans un certain domaine de recherche.

> « D'où proviennent tous les matériaux [qui permettent la résolution du problème], tous ces éléments auxiliaires, tous ces théorèmes ? Le chercheur les a rassemblés, les a extraits de sa mémoire, les a reliés volontairement à son problème. Nous appellerons un tel rassemblement « mobilisation » et une telle liaison « organisation ».

Enfin, pour résumer l'activité de résolution de problème, Polya donne ce schéma :



L'approche de Polya est plus précise du point de vue de l'activité mentale que celle de N. Rouche. Un des chapitres de son livre[7] s'intitule « Le travail de l'esprit ». C'est dans ce chapitre qu'il écrit qu'il faut reconnaître et se souvenir, qu'il faut ajouter et regrouper, qu'il faut isoler et combiner.

Ce que la gestion mentale peut apporter

Reprenons la description que fait Polya de la démarche du chercheur d'un problème de mathématique[8].

7. *La découverte des mathématiques*, t 2, « Une méthode générale », Dunod.
8. *op. cit.*, p. 244.

> « Quand le problème commence à se poser, il n'est qu'une simple image : le chercheur ne l'aperçoit que comme un tout sans ou avec très peu de détails ; par exemple, il peut n'en voir que les parties principales, inconnues, données et condition, ou l'hypothèse et la conclusion. Toutefois l'image finale est très différente : elle est complexe, remplie de détails et d'éléments dont le chercheur aurait été bien en peine de dire, au début, s'ils avaient quelques rapports avec le sujet. Dans la figure originale, presque vide, se trouvent des lignes auxiliaires, des inconnues auxiliaires, des matériaux issus d'une connaissance antérieure. Le chercheur ne pouvait pas prévoir au commencement qu'ils seraient applicables au sujet en question. »

Ainsi, Polya décrit le résultat de l'activité du chercheur. Peut-on suggérer maintenant des moyens d'obtenir ce résultat ?

Quand le problème commence à se poser, il n'est qu'une simple image... L'image finale est très différente.

L'évocation du problème

Nous dirions qu'il faut « évoquer » ce problème avec de plus en plus de précision, avec comme seul projet que cette évocation soit la plus précise possible, car on ne sait pas encore de quel côté on va se diriger. Cette évocation sera peut-être visuelle, comme le suggère Polya, mais elle sera peut-être verbale, ou les deux. Elle peut être faite verbalement en donnant des descriptions successives, chacune contenant la précédente, mais devenant plus précises par la confrontation constante avec le réel. Le problème pourra être placé dans un cadre temporel, ou dans un cadre spatial, tout cela dépendra des habitudes de celui qui évoque. De cette confrontation entre le problème évoqué et le problème donné va naître le sens du problème.

Voici un exemple :
On demande à des élèves de Seconde de résoudre ce problème[9].

> *Un récipient cylindrique, dont la base a pour rayon 10 cm, contient une balle de diamètre 18 cm.*

Figure 1

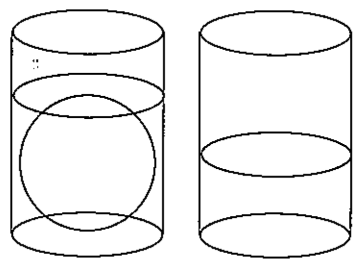


Figure 2

9. *Déclic*, Hachette, p. 30.

On verse de l'eau dans le récipient de façon à couvrir la balle (qui ne flotte pas)
Figure 1 : la surface de l'eau est tangente à la balle.
Figure 2 : la balle est retirée du récipient
a) Calculer la valeur exacte de la hauteur d'eau lorsque l'on a retiré la balle.

Polya remarque qu'au début le chercheur n'a du problème qu'une image vague, et qu'à la fin il a une image « très complexe » remplie de détails et d'éléments nouveaux qui permettront peut-être de résoudre le problème. Polya n'indique pas comment passer de cette image vague du début à l'image complexe de la fin.

La gestion mentale peut combler cette lacune : on va commencer par évoquer le problème, c'est-à-dire par le rendre mentalement présent. Pour aider les élèves à le faire, on peut leur demander de lire l'énoncé jusqu'à ce qu'ils soient capables de le reproduire sans regarder le livre. La reproduction qu'ils vont donner pourra être de la même forme que l'énoncé initial, mais pourra être d'une forme complètement différente : c'est l'élève qui doit choisir la forme qui lui semble la plus pertinente pour lui.

Cette première retranscription faite, l'élève doit revenir à l'énoncé initial pour vérifier que, indépendamment de la forme, son énoncé à lui contient tous les éléments du problème. Il faudra peut-être quelques allers et retours pour qu'il y ait cohérence. Remarquons qu'il est possible que certains élèves soient capables de retranscrire de mémoire exactement un énoncé sans pour autant lui donner de sens. Il faudra les amener à transposer cet énoncé.

Précision collective de l'évocation du problème

Cela fait, il va falloir maintenant préciser l'évocation du problème. **On ne cherche toujours pas la solution,** on ne fait que préciser l'évocation du problème.

On peut demander quels sont ceux pour qui le schéma est plus important que le texte, et ceux pour qui c'est le contraire ; ceux pour qui les figures 1 et 2 du livre n'ont à peu près pas de signification, ceux pour qui elles sont une sorte de bande dessinée qui représente une suite d'actions se déroulant dans le temps et ceux pour qui il s'agit de schémas placés côte à côte, en même temps, et que l'on rapproche simplement pour les comparer.

Un élève vient ensuite faire un schéma au tableau. Que l'évocation personnelle ait été visuelle ou verbale, chacun va compléter ce schéma en y apportant sa vision personnelle. En particulier, on va apprendre à se poser le plus de questions possible :
- Comment sont les espaces entre la balle et le cylindre ?
- Est-ce que la balle repose au fond du cylindre ?
- Est-ce qu'elle touche le fond du cylindre au centre de la base ?

- En quoi la balle peut-elle être ?
- Est-ce que l'eau touche le haut de la balle ?
- Où voit-on les 18 cm (diamètre de la balle) ? Les représenter partout où ils apparaissent.
- L'eau a baissé : Pourquoi ?
- Est-ce une question de poids ou de volume ?
- Où peut-on voir le volume de la balle ?
- Peut-on voir ce volume, même quand la balle a disparu ?
- Peut-on se représenter ce volume « imaginé » ? Comment est constituée sa base ?
- Que cherche-t-on ? Quel nom donner à ce qu'on cherche ? Où voit-on ce qu'on cherche sur le schéma ?

Etc.

Les réponses à ces questions sont ajoutées au schéma collectif. On cherche à la fois des représentations verbales ou visuelles. On peut obtenir une représentation de ce genre :

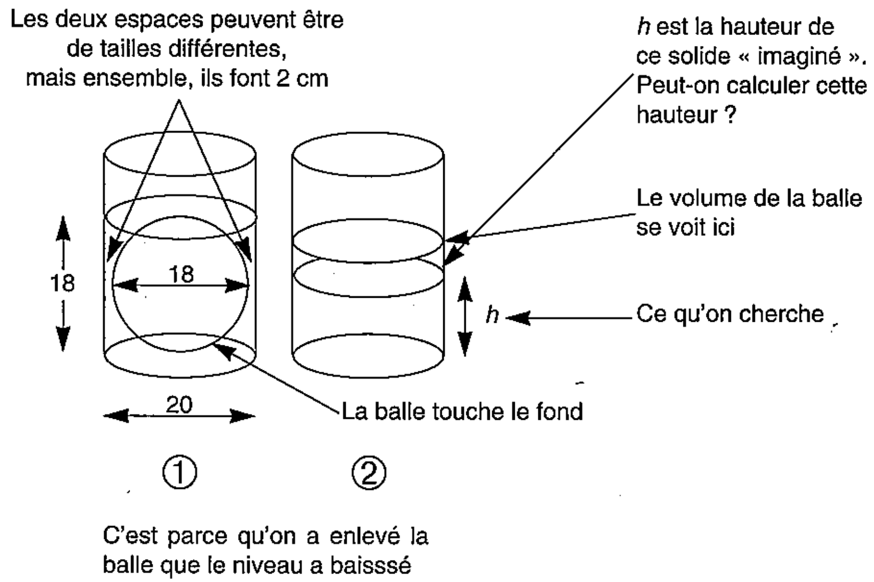


Schéma obtenu

Il y a beaucoup d'éléments qui peuvent sembler inutiles sur ce schéma, mais maintenant chacun a pu pénétrer le sens de la situation à partir de ses propres représentations. C'est la précision de l'évocation qui va permettre de résoudre le problème.

Il est remarquable de constater que maintenant le plan pour trouver la solution est évident pour la plupart des élèves : il faut chercher le volume du cylindre ombré (figure 2).

Ce que la gestion mentale a apporté, ce sont des évocations successives, de plus en plus précises, qui respectent les habitudes de chaque élève et qui vont, à un certain moment, offrir comme une évidence la ligne d'action dont parle Polya. C'est un travail qui n'est pas mystérieux, auquel chacun peut s'entraîner, à condition de savoir que c'est là la clé de la réussite.

La nature de la solution trouvée dépend directement de la nature de l'évocation

Le problème que l'on résout n'est jamais le problème posé, mais le problème évoqué. La forme de l'évocation va influer directement sur la solution trouvée. La solution est souvent itérative quand l'évocation a été verbale et située dans le temps. Elle est souvent obtenue par réorganisation spatiale de la situation proposée pour faire jaillir des rapprochements qui apparaissent soudain évidents pour ceux qui ont une évocation plus visuelle et spatiale. Pour l'enseignant, il est souvent inutile d'expliquer dans un cadre spatial un problème à un élève qui évoque dans un cadre temporel, et réciproquement. Le lien entre les styles d'évocation et les stratégies de résolution de problèmes est un apport très important de la gestion mentale.

La mobilisation

Qu'en est-il de la mobilisation ? Polya nous dit que le chercheur doit « extraire [les objets] de sa mémoire et les relier volontairement à son problème ». Il y a deux aspects : la mobilisation (aller chercher les objets dans sa mémoire) et l'organisation (les relier au problème).

Nous dirons que le sujet doit faire un retour sur ses acquis pour les faire « fléchir[10] » sur l'objet évoqué. Il va chercher dans sa mémoire des évoqués qui ont un rapport avec ce qu'il a évoqué du problème, rapport de forme, rapport verbal. **Les objets mentaux peuvent ne pas se présenter dans la forme qui convient au problème, d'où la nécessité de les transformer pour qu'ils soient utilisables.** Ce travail mental nécessite un entraînement. Cet entraînement doit être fait avant de se trouver dans la situation d'en avoir besoin. **C'est juste après qu'un objet mathématique a été créé mentalement, juste après que l'on se trouve délivré de ce travail de création, mais avant de le mémoriser, qu'il faut s'entraîner à le modifier, à lui donner des formes différentes pour qu'il soit reconnaissable plus tard, quand on le rencontrera sous une forme un peu différente.**

10. C'est justement la définition que l'on peut donner au geste de réflexion.

Voici un nouvel exemple (figure 3).

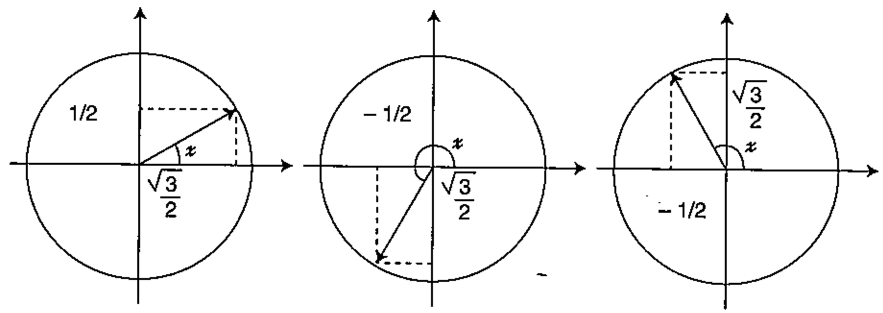
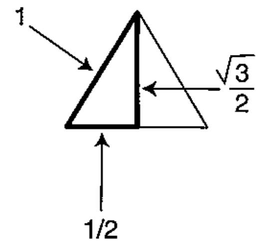


Figure 3

On présente ces trois figures et on demande dans chacune d'elles de déterminer l'angle x. C'est un problème classique au début de la trigonométrie.

Quel est l'entraînement mental qui va permettre aux élèves de répondre à cette question ?

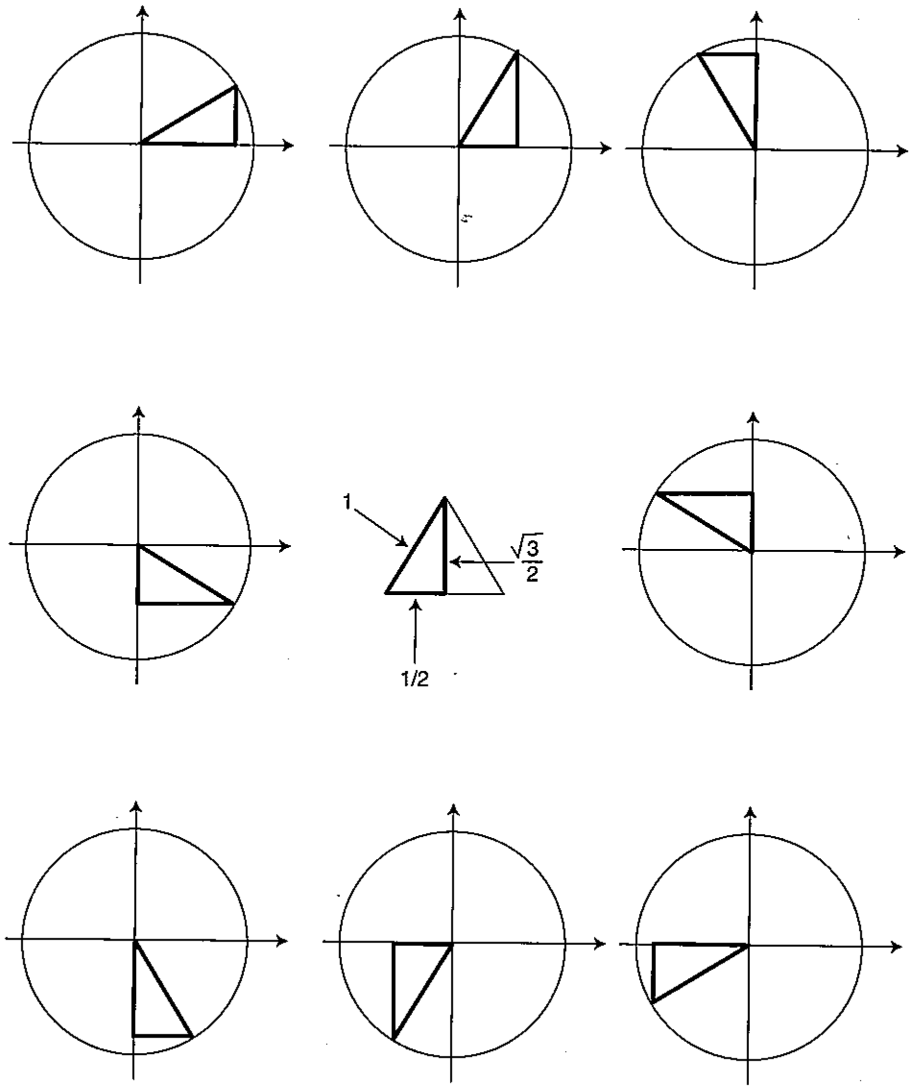
Remarquons qu'il s'agit de reconnaître la moitié d'un triangle équilatéral dans une position inhabituelle :



Mais il ne suffit pas d'avoir fait un cours ou un rappel sur la « moitié du triangle équilatéral » pour que les élèves placés devant le problème pensent à utiliser cette propriété du triangle équilatéral. Il faut un entraînement mental qui va se faire en deux parties :

1 – mémorisation du demi-triangle équilatéral dans le triangle équilatéral complet avec les mesures des côtés et de la hauteur ;

2 – travail mental qui va consister à placer, en évocation, le demi-triangle équilatéral dans des positions où on pourra le rencontrer.



Chacun mentalement, avec le projet de reconnaître ce triangle dans ces diverses positions, déplace le demi-triangle, soit visuellement, soit en se donnant la description des transformations pour les « voir » et place sur les axes du cercle, en tenant compte du signe, les valeurs 1/2 et $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ce travail fait, quand les élèves rencontreront des situations analogues au problème posé (figure 3), ils vont reconnaître le demi-triangle et calculer l'angle parce qu'ils auront placé le demi-triangle, en *évocation* et *avec le projet de le reconnaître*[11].

Le travail de mobilisation et d'organisation doit être préparé au moment de l'acquisition. Il est préparé par un entraînement à donner des formes variées à ce qui est acquis avec le projet de reconnaître ces diverses formes dans un projet de réutilisation. S'il n'y a pas ce projet et cet entraînement, la « mobilisation » et « l'organisation », pour reprendre les termes de Polya, seront beaucoup plus difficiles et surtout resteront des activités mystérieuses. Notons aussi que c'est une façon de préparer les transferts qui ne se font à peu près jamais spontanément.

La mobilisation des connaissances au début d'un cours

Au début de chaque leçon, on peut commencer par poser une question qui oblige les élèves à replonger dans les cours précédents pour en extraire ce qui sera nécessaire au cours qui commence. Cette simple activité oblige à évoquer sous une forme reconnaissable ce qui sera nécessaire à la compréhension du cours. On peut aussi demander aux élèves d'évoquer dans une forme qui sera discrètement utilisable dans le problème nouveau à résoudre. On fait prendre conscience de la nature du travail mental à faire : il s'agit de comparer les évoqués du problème ou de la façon nouvelle aux évoqués antérieurs, pour les comparer et les relier et c'est précisément la définition du geste de compréhension. Ensuite, ils devront prendre l'habitude d'évoquer des objets non pas identiques à ceux dont ils ont besoin, mais seulement voisins.

La gestion mentale donne des moyens de décrire le geste mental de « mobilisation » et de compréhension et permet de s'entraîner pratiquement à le réaliser

Pour cela, et comme on l'a vu dans l'exemple traitant de la trigonométrie, il faudra que les élèves prennent l'habitude de mémoriser ce qu'ils ont compris en donnant toujours à l'objet mémorisé une possibilité de transformation. L'élève aura alors un projet de réutilisation plus précis : il ne devra pas forcément utiliser ce qui a été compris tel quel, mais après transformation. C'est parce qu'il aura eu ce **projet** de réutilisation qu'il reconnaîtra plus tard plus facilement les objets dont il a besoin quand le temps viendra.

Quand un « objet » aura été reconnu, il faudra retrouver toutes les propriétés qui avaient été établies à son propos, c'est-à-dire son sens. Ceux dont le projet de compréhension est « applicatif » chercheront plutôt des propriétés qui leur permettront d'appliquer, les autres d'expliquer et la cohérence entre la nature de leur projet et la nature de la situation

11. Expérience faite cette année en 1re STL.

de problèmes qu'ils ont à résoudre aura une grande influence sur leur succès. Ce travail va permettre de décider si l'objet que l'on a reconnu peut être utile au problème que l'on a à résoudre. **Toute mémorisation d'un objet mental doit donc avoir une forme qui permet de le reconnaître, une possibilité de transformation, et des propriétés associées. Cela peut s'exprimer verbalement ou graphiquement.**

Ce projet de reconnaître oblige souvent à « isoler » des parties qui deviennent ainsi reconnaissables. Ces parties isolées, reconnues, associées à leurs propriétés remémorées vont ensuite permettre une réorganisation de l'ensemble de ce qui est évoqué. Pour réorganiser ces parties reconnaissables, il faut les classer en distinguant les éléments mobiles ou variables dans l'espace ou dans le temps, les éléments fixes dans l'espace ou dans le temps, qui sont des données.

Polya suggère qu'ajouter et regrouper est un moment important dans la recherche d'une solution. En général on ne trouve rien sur une configuration géométrique parce qu'elle est trop pauvre. C'est en l'enrichissant, en ajoutant des lignes, en faisant apparaître des symétries par exemple qu'on se donne une matière sur laquelle la réflexion pourra s'exercer. Un problème écrit demande aussi qu'on puisse le structurer en lui ajoutant soit des éléments spatiaux, soit des éléments temporels. Quelquefois, il s'agit de modifier l'arrangement déjà existant pour faire apparaître une structure. Selon que l'évocation est de nature spatiale ou temporelle, il faudra la compléter de ce point de vue. Le but est encore de faire apparaître des structures connues, de transformer le problème de façon à en faire une représentation qui soit familière : c'est explorer. **Explorer n'est pas s'en remettre seulement au hasard, c'est transformer le problème pour pouvoir reconnaître des évoqués. Plus simplement, il faut apprendre à transformer la situation donnée nouvelle et apparemment inconnue en une pour faire apparaître des éléments connus.**

Conclusion : ce que la gestion mentale apporte à la didactique des mathématiques

Revenons maintenant à la conclusion de N. Rouche : il indique enfin « qu'apprendre les mathématiques, c'est d'abord réaliser que certains types de questions exigent d'aménager, de restructurer et d'augmenter une partie du savoir quotidien jusqu'à en faire un corps de doctrine qui s'en détache et s'applique efficacement ».

Il écrit aussi : « Personne n'apprend les mathématiques comme connaissances toutes faites. Chacun doit les reconstruire pour soi, et en ce sens, la seule possibilité est d'aller vers le savoir à travers sa propre activité. Une façon d'y arriver, c'est de faire tout de suite des

mathématiques, élémentaires certes au début, à tout moment au niveau où on se trouve. »

Enfin, il ajoute : « Les mathématiques sont une science et une pratique. On accède très progressivement à cette science en se plongeant tout de suite dans cette pratique, sans la tronquer d'aucun de ses trois registres essentiels. »

On ne peut qu'être d'accord. Ce que la gestion mentale apporte, c'est à la fois la justification de cette position à partir de l'analyse du travail mental dans l'apprentissage des mathématiques ; mais en plus, et c'est fondamental, la gestion mentale donne les moyens, aussi bien à l'élève qu'à l'enseignant, de se placer au cœur même de cette démarche, c'est-à-dire au niveau de l'organisation individuelle de l'activité mentale consciente de celui qui apprend.

Mais il y a plus : ce travail mental conscient devient un projet pour celui qui apprend, et ce projet, c'est de donner un sens à son activité. Ce projet de donner du sens est le moteur de l'évocation. C'est aussi sans doute l'essence même de l'être humain. L'explication des projets de sens qui conduisent à faire et à apprendre des mathématiques constitue l'essentiel de l'apport de la gestion mentale.

Enfin, insistons sur un dernier point : N. Rouche insiste sur la nécessité de faire tout de suite des mathématiques, élémentaires certes au début, à tout moment au niveau où on se trouve. Cela est essentiel, et là encore nous avons vu que c'est l'évocation de plus en plus fine d'une situation qui permet d'en dégager le sens, et non pas le cours traditionnel que le professeur peut faire à propos de cette situation. La gestion mentale permet d'accéder aux mathématiques par la pratique, dirigée certes, mais active et efficace des mathématiques.