surdéveloppé l'une ou l'autre stratégie, conformément à la commande pédagogique de leurs maîtres (enseignants et parents), en refoulant les stratégies qui leur seraient plus naturelles et plus conformes à leurs forces cognitives, mais on leur a laissé croire qu'ils n'avaient pas le droit d'y recourir.

Combien d'élèves essaient de déchiffrer un texte en ânonnant parce que, pour eux, lire c'est dire des sons. Ils ne se donnent pas le droit de deviner un mot à partir du contexte. On m'a parlé d'un enfant complètement paniqué à l'idée de devoir retenir des centaines de mots parce que pour lui, lire c'était reconnaître des mots instantanément, par idéographie. Il nous a fallu amener des élèves à changer d'habitudes mentales acquises par conditionnement mais totalement inefficaces en situation de lecture. Avant d'entreprendre toute rééducation, il est nécessaire de bien cerner les forces cognitives de l'élève et de se questionner sur les stratégies qu'il utilise. Par la suite, on abordera l'enseignement d'autres stratégies en respectant son fonctionnement mental et on lui fera découvrir une définition plus adéquate de l'acte de lire (lire, c'est comprendre ce qui est écrit). L'approche de la gestion mentale fournit des clés aux élèves pour leur permettre d'accéder à leur vie mentale. Le langage employé pour mener le dialogue pédagogique leur convient. La prise de conscience que quand ils lisent, il se passe des choses dans leur tête et l'acceptation sans jugement de ce qui s'y passe, donnent à ces jeunes le sentiment d'être rejoints dans ce qu'ils sont.

Dans l'expérience ici relatée, il est évident que la gestion mentale a fourni aux orthopédagogues des moyens pour aller plus loin. Elle leur a ouvert des portes vers de nouvelles dimensions à explorer. Tous les élèves qui arrivent à l'école Vanguard ont passé des tests d'intelligence. A partir d'une analyse des sous-tests où l'élève a eu une bonne performance et des sous-tests où il a présenté un déficit, les psychologues dressent un portrait des forces cognitives de l'élève et de ses faiblesses. Ce diagnostic éclaire l'orthopédagogue en lui indiquant sur quoi se baser pour entreprendre son plan d'intervention, mais il ne lui indique pas comment intervenir. C'est là le champ propre de l'orthopédagogie.

En pratiquant le dialogue pédagogique, l'orthopédagogue a personnalisé la relation avec chaque élève ; cela lui a permis de mieux comprendre le fonctionnement mental de chacun, de raffiner ses analyses. La finesse des analyses permet ensuite d'entrevoir des actions et des interventions plus pertinentes. Nous estimons que l'approche d'A. de La Garanderie donne à l'orthopédagogue des moyens pour éveiller la conscience métacognitive de l'élève ayant des difficultés graves d'apprentissage, pour lui enseigner des stratégies de remédiation et pour lui apprendre à les utiliser à bon escient.

Chapitre 3

Gestion mentale et activité mathématique

L'ÉVALUATION ET LA GESTION MENTALE : QU'ÉVALUE-T-ON ?

On pourrait considérer la « gestion mentale » comme un ensemble de techniques dont le but est d'améliorer la communication entre l'enseignant et la classe. Il suffirait que les élèves prennent conscience de leurs habitudes évocatives et que l'enseignant veille à présenter son message en tenant compte de la diversité de ces habitudes, pour que de nombreuses difficultés d'apprentissage disparaissent. Dans ces conditions, l'évaluation de l'efficacité de la gestion mentale serait simple : un enseignant ferait un cours de façon traditionnelle, un autre ferait le même cours en appliquant les techniques de gestion mentale et on évaluerait les progrès effectués dans les deux classes.

En mathématique, il est possible qu'on constate ainsi certains progrès. Pour ce qui est des expériences de ce genre auxquelles j'ai pu participer, les progrès concernaient surtout des élèves moyens. Les mathématiques se démarquaient souvent de disciplines faisant appel de façon plus évidente à la mémorisation. En revanche, j'ai vu des progrès considérables chez des élèves faibles et même très faibles. Dans tous les cas, le problème essentiel que les élèves rencontraient étaient celui du sens : pour eux les mathématiques n'avaient pas de sens, c'était une activité ir-

ALAIN TAURISSON, professeur de mathématiques et ancien professeur régulier, au département de mathématiques et informatique de l'université du Québec à Montréal.

rationnelle dans laquelle ils tentaient d'évoluer comme des automates. Ces élèves faisaient des progrès parce que la gestion mentale était utilisée pour donner du sens au mathématiques.

Le premier problème que pose l'enseignement des mathématiques est celui du sens. Dans ces conditions, ce que l'enseignant de mathématiques doit rechercher, ce n'est pas seulement que « son message passe mieux », mais bien la transformation de ce message pour qu'il devienne générateur de sens pour ses élèves. Est-ce que, dans ce domaine, la gestion mentale peut apporter d'abord un éclairage nouveau et ensuite offrir des solutions inédites ? Ce sont les deux points que je voudrais aborder dans ce chapitre. Le problème se pose surtout pour des élèves ayant des difficultés en mathématiques. Ce qui suit concerne donc d'abord cette catégorie d'élèves.

QUELQUES QUESTIONS POSÉES PAR LA GESTION MENTALE

Qu'est-ce que la gestion mentale ? En simplifiant à l'extrême, on peut dire que c'est envisager la didactique d'une discipline à partir du processus évocatif. C'est aussi considérer que le processus évocatif est piloté par le projet de celui qui apprend. Mais avoir un projet c'est déjà donner su sens[1]. C'est donc à travers le projet que nous pouvons aborder le problème du sens. Faire de la gestion mentale en mathématiques, c'est d'abord, en tant qu'enseignant, se poser trois questions :

1. Quelles sont les caractéristiques de l'évocation en mathématiques ?
2. Quels sont les projets éventuellement implicites de celui qui réussit bien en mathématiques ?
3. Comment faire en sorte que ces projets deviennent ceux de celui qui veut apprendre à devenir, à son niveau, un mathématicien ?

Les questions 1 et 2 conduisent à analyser l'activité mathématique à partir de l'évocation et du projet. La question 3 concerne les moyens pédagogiques que l'on peut déduire de cette analyse.

1. « L'intelligible est en puissance dans les objets de perception et ne passe à l'acte de la prise de conscience que par la reprise mentale des contenus perçus, qui sont alors évoqués par des images auditives ou visuelles. Et c'est à ce stade des évocations visuelles ou auditives que se constitue le signifiant des réalités perçues. Le signifiant aura donc strictement la forme que revêt le projet ». A. de La Garanderie.

L'ÉVOCATION MATHÉMATIQUE

La diversité des habitudes mentales

Parler d'évocation, c'est dire que l'élève générique n'existe plus. Il reste des élèves avec des habitudes mentales. Il faut connaître et partir de ces habitudes mentales.

Quelles sont les « habitudes mentales » des élèves qui sont devant moi ? Dans quelle mesure, en tant qu'enseignant, dois-je les connaître ?

Il est nécessaire de connaître, au moins dans les grandes lignes, les habitudes mentales des élèves ; pour cela, nous disposons de deux outils : le dialogue pédagogique et l'entrevue individuelle. Les deux demandent un certain entraînement à l'écoute active. Je crois que l'on peut réserver les entrevues individuelles à des cas plus difficiles. En orientant ces entrevues sur la conception que les élèves ont du temps et des représentations qu'ils s'en donnent, on peut obtenir et partager avec les élèves concernés des informations très suffisantes. Des entrevues de quinze minutes peuvent suffire. Pour que cela soit possible, il faut néanmoins que les enseignants aient une certaine formation. Faire passer cette sorte d'entrevue est indispensable pour se convaincre de la diversité et de la richesse des habitudes mentales. Cette expérience peut suffire pour vouloir remettre en cause sa pratique pédagogique. Elle ne suffit pas pour trouver des solutions pédagogiques.

Les représentations mentales de ceux qui font des mathématiques

Parler d'évocation, c'est prendre en compte les images mentales : une connaissance, une procédure se représentent. On a accès à ces connaissances, à ces procédures par des représentations qu'on se donne. La gestion mentale s'intéresse à ces représentations, à leur nature, à leur précision. La méthode est celle que Sartre[2] indiquait : « Nous voulons simplement tenter une "phénoménologie" de l'image[3]. La méthode est simple : produire en nous des images, réfléchir sur ces images, les décrire, c'est-à-dire tenter de déterminer et de classer leurs caractères distinctifs ». Pour cela, il faut pratiquer une certaine forme d'introspection, un retour de la conscience sur les représentations mentales qu'on se

2. Sartre, *L'imaginaire*, Idées Gallimard, p. 15.
3. Nous prenons « image » au sens large, une image pouvant ne pas être une représentation visuelle.

donne. Comme le dit Sartre[4] : « L'homme qui, dans un acte de réflexion, prend conscience "d'avoir une image" ne saurait se tromper ». Jean-Pierre Changeux[5] affirme, en parlant d'expériences introspectives : « Toutes ces expériences font certes intervenir l'introspection du sujet, mais elles conduisent à des mesures et celles-ci sont reproductibles d'un sujet à l'autre. La matérialité des images mentales ne peut être mise en doute ».

Si comme le disait Epicure « c'est parce que quelque chose des objets extérieurs pénètre en nous [...] que nous pensons », *quelles sont ces « images mentales » qui forment le substrat de la pensée de celui qui fait des mathématiques ? Que doivent-elles aux mathématiques, que doivent-elles au sujet ?*

Beaucoup d'exploration reste à faire dans ce domaine. Chaque cours peut comprendre une recherche des représentations que se font les élèves de certaines notions : par exemple comment vous représentez-vous une fonction ? On fait alors l'inventaire des représentations. Ces représentations sont discutées, précisées jusqu'à ce que, dans leur diversité, elle puisse constituer une bonne représentation de l'objet mental « fonction »[6]. La difficulté est de connaître les représentations que se font des « experts » dans le domaine[7]. Ces représentations restent non dites, ou non montrées. Le professeur doit alors faire appel à ses représentations personnelles. Chaque représentation a, en général, un aspect procédural et un aspect global. Il ne faut pas confondre les représentations mathématiques que l'on trouve dans les manuels, et qui sont un intermédiaire sur lequel on peut penser, et les représentations mentales des objets mathématiques. Un travail systématique d'investigation reste à faire.

L'intégration des nouvelles connaissances aux anciennes

Chaque connaissance nouvelle doit non seulement être mentalement représentable par chaque élève, mais elle doit pouvoir se rattacher à d'autres représentations qui lui sont familières. C'est à cette condition que le « nouveau » prendra son sens. Il s'agit donc de créer un environnement axé sur l'organisation des connaissances. Du point de vue de la gestion mentale, il faut se poser les questions suivantes[8] :

4. *Ibid.*, p. 13.
5. J.P. Changeux, *L'homme neuronal*, Fayard, p. 176.
6. Pour l'utilisation de l'introspection en pédagogie, voir A. de La Garanderie, *Défense et illustration de l'introspection*, Le Centurion, 1989.
7. Il faudrait poursuivre un travail équivalent à celui qu'a effectué J. Nimier, mais du point de vue des représentations mentales. J. Nimier, « Entretiens avec des mathématiciens », IREM de Lyon, 1989.

Comment faire remonter à la conscience ces représentations familières ? Comment assurer l'arrimage de cette nouvelle représentation aux anciennes ?

Chaque cours peut commencer par quelques questions posées aux élèves et auxquelles ils tentent de répondre en cherchant dans leurs notes. Le but de l'exercice est de ménager une rupture avec ce qu'ils ont fait avant le début du cours, de rendre les élèves disponibles et de mobiliser les connaissances dont ils auront besoin pendant le cours qui débute. Il faut que les connaissances antérieures soient présentées dans une forme où elles vont être directement utilisables ; ce point est particulièrement important en mathématiques. Les « rappels » traditionnels doivent être recherchés et mis en forme par les élèves eux-mêmes. La gestion mentale insiste sur l'importance de cette mobilisation des connaissances par l'élève lui-même. On constate des progrès importants simplement en respectant cette contrainte.

On verra qu'au moment de la mémorisation d'une connaissance, il faut aussi mémoriser le projet de la réutiliser. Il faut souligner d'autre part que la capacité à comprendre un énoncé, à apprendre quelque chose de nouveau, et à résoudre un problème, dépend directement des connaissances spécifiques qui sont disponibles dans la mémoire à long terme sur le domaine considéré. La mobilisation des connaissances antérieures est donc fondamentale. La gestion mentale donne des moyens pratiques de la réaliser.

Les processus de résolution de problèmes

Partir de l'évocation, c'est affirmer que non seulement les connaissances, mais aussi leur traitement dépendent des représentations qu'on se donne, et que la façon de résoudre un problème dépend directement du codage que l'on s'en est donné. La situation est semblable à celle que l'on rencontre en programmation : la structure des données a une influence directe sur la structure du programme qui en assure le traitement. Un problème ne peut donc se résoudre simplement à partir de considérations mathématiques. Il faut tenir compte à la fois des nécessités mathématiques et des codages mentaux particuliers de chaque individu. Les stratégies de résolution de problèmes sont directement reliées à la

8. On verra plus loin que ce problème est aussi abordé au moment du « transfert », et qu'il faut qu'il y ait aussi « projet de transfert » pour que les représentations « remontent facilement » à la conscience.

représentation mentale, donc aux habitudes mentales évocatives des élèves.

Comment aborder la résolution de problèmes dans ces conditions ? Comment s'assurer que les élèves se donnent une représentation mentale précise ? En outre, une représentation d'un problème dans le temps et une représentation du même problème dans l'espace, vont conduire à des solutions souvent radicalement différentes, solutions souvent itératives dans le premier cas, souvent globales et quelquefois inattendues dans le second. Si l'enseignant explique un problème à partir d'une représentation mentale spatiale à un élève qui, lui, s'est donné une représentation mentale dans le temps, il y aura incompréhension. Comment tenir compte de ces différences ?

Faire des mathématiques, c'est avant tout résoudre des problèmes, et c'est dans la résolution de problèmes que la gestion mentale se révèle un outil particulièrement important. Il y a certaines conditions à respecter : il faut passer le temps nécessaire sur la représentation interne d'un énoncé. Pour forcer l'évocation en classe de seconde, je demande de commencer la résolution du problème sans avoir recours à l'énoncé. Il doit donc être complètement évoqué, c'est-à-dire mémorisé de façon immédiate dans la forme qui convient à chacun. Il est facile de comparer les formes d'évocation. Il suffit que trois ou quatre élèves décrivent au tableau ce qu'ils ont gardé de l'énoncé pour se rendre compte de la diversité des évocations et donc des solutions qui en découlent. On sera particulièrement attentif aux représentations dans le temps (verbales) et aux représentations dans l'espace (globales et souvent visuelles). Le temps consacré à cette mise en évocation du problème et à la comparaison des évoqués peut sembler long : il peut dépasser facilement une demi-heure pour un problème en seconde. On ne fait que retrouver ce que les « experts » font : ce qui distingue un expert d'un novice dans la résolution de problèmes est justement le temps passé à la représentation du problème par rapport au temps passé à sa résolution[9]. La gestion mentale est d'une grande aide dans ce domaine : en respectant les modalités de représentation des élèves, et en s'attachant à la précision de ces représentations, elle contribue à former les représentations mentales claires qui sont la première condition à la fois du sens donné au problème et de sa résolution. Elle montre aussi que cette précision des représentations mentales ne peut être obtenue que dans le respect des habitudes mentales des élèves. D'autre part la gestion mentale insiste sur une certaine forme de « métacognition », qui est considérée comme une variable très importante

9. J.F. Voss ; S.N. Tyler ; L.A. Yengo, « Individual Differences in The Solving of Social Science Problems », in R.F. Dillon et R.R. Schmeck *Individual Differences in Cognition*, 1983, pp. 205-232, New York, Academic Press, cité aussi par J. Tardif, p. 219.

de la réussite dans la résolution de problème. La « mise en équation » est considérée comme la traduction de ce qu'on a compris de l'énoncé dans une langue seconde, la langue mathématique. Le rapprochement avec la pédagogie d'une langue seconde peut être extrêmement intéressant.

La prise de conscience et la représentation mentale des stratégies complexes en mathématiques

Evoquer, c'est aussi se représenter des démarches, des procédures et en particulier des procédures de résolution de problèmes, qui sont aussi des connaissances d'un genre particulier. On considère généralement trois types de connaissances[10] : les connaissances déclaratives (ce qu'on sait à propos d'un « objet »), les connaissances procédurales (ce qu'on sait et comment le faire), et les connaissances conditionnelles (dans quelles circonstances on peut faire). Nous appelons « complexes » les connaissances des deux derniers types. En mathématique, une identité remarquable est une connaissance déclarative, une méthode de résolution d'une équation du premier degré est une connaissance procédurale, la résolution d'une inéquation est une connaissance conditionnelle : il faut savoir quand changer le sens de l'inéquation. Or on représente bien les connaissances déclaratives, donc on donne les moyens de les mémoriser à long terme. On ne représente pas systématiquement, et particulièrement graphiquement, les connaissances procédurales et les connaissances conditionnelles et, bien sûr, on ne discute pas la forme de ces représentations. On ne donne donc pas de moyens de les mémoriser à long terme, et ce sont justement ces connaissances qui entrent en jeu au moment de trouver des solutions à un problème. On voit un des travers dans lequel pourrait tomber un utilisateur de la gestion mentale en mathématiques : utiliser les techniques de gestion mentale simplement pour mémoriser ce qu'on représente déjà bien, au lieu de chercher, avec les élèves, à représenter ce qu'on néglige traditionnellement de représenter. On doit donc se poser le problème suivant :

Comment représenter des connaissances procédurales et des connaissances conditionnelles de façon à ce que les élèves puissent évoquer ces connaissances à partir de leurs habitudes évocatives ?

C'est questions sont largement ouvertes. Par exemple, on n'a que peu de représentations visuelles des théorèmes. Certains élèves donnent des représentations schématiques de démonstration qui sont rejetées parce qu'on exige des démonstrations rédigées. Certains élèves sont

10. J. Tardif, *Pour un enseignement stratégique*, Logiques, Montréal, 1992, p. 180 ; J.F. Richard *et al.*, *Traité de psychologie cognitive* 2, chapitre 2, 1990, Dunod.

faibles parce qu'ils sont obligés de décrire verbalement ce qu'ils aimeraient représenter schématiquement. Il est possible de construire de telles représentations. Les travaux de Henri Planchon[11] vont dans ce sens. Rudolf Arnheim[12] a abordé directement la question de la « pensée visuelle » et du langage visuel qui la sous-tend. J'ai pu constater cette année l'efficacité des telles représentations en travaillant avec les élèves des représentations visuelles de connaissances conditionnelles dans la résolution des inéquations.

Apprivoiser la complexité

Le sens en mathématiques provient aussi des multiples aspects que peut prendre une notion mathématique. Il faut pouvoir rapprocher ces situations diverses pour créer mentalement des liens. Ceci ne peut se faire qu'à condition d'aborder des situations suffisamment complexes[13] qui font souvent peur aux élèves moyens et faibles. Il faut donc apprendre à aborder ce genre de situations.

Comment apprendre à des élèves à aborder sans peur, et en terme de gestes mentaux, des tâches ou des situations complexes ?

La gestion mentale, à travers des évocations dirigées, progressivement ordonnées, offre des possibilités intéressantes de « gestion de la complexité ». On peut partir de situations graphiques complexes auxquelles on apprend à donner un sens à travers l'évocation. On peut faire la même chose à partir d'énoncés. Il est facile de travailler en collaboration avec des enseignants de français ou de sciences sur ce thème.

LE PROJET EN MATHÉMATIQUES

La gestion mentale a mis en évidence le rôle du projet dans la vie mentale. Il existe plusieurs formes de projets qui méritent tous d'être explicités.

Le projet global ou à long terme de l'élève

Il y a le projet global de l'élève : je veux devenir... Ce projet est souvent flou ou absent.

11. H. Planchon, *Réapprendre les maths*, ESF, 1989.
12. R. Arnheim, *Visual Thinking*, University of California Press, 1984.
13. H. Planchon, *op. cit.*, pp. 71 et suivantes.

Comment placer les élèves dans un processus de définition de leurs projets à long terme ?

Il faut travailler à le préciser, pas en mathématiques, mais en collaboration avec les enseignants de toute discipline et les conseillers d'orientation. L'impression « d'absence d'avenir » d'un grand nombre d'adolescents conduit à l'absence de projets, même d'ordre scolaire, en particulier à l'absence de capacités de mémorisation. Il faut que l'institution scolaire se préoccupe des projets des élèves et les aide à les définir plus qu'elle ne le fait.

Des objectifs du cours fixé par l'enseignant au projet des élèves

Le professeur fixe des objectifs :
— il y a l'objectif à atteindre en terme de connaissance : voici ce qu'il faudra savoir ;
— il y a le seuil de performance à atteindre : voici la note que le groupe devra atteindre.

Ces objectifs sont extérieurs à l'élève : *comment faire pour qu'ils deviennent des projets pour chaque élève ?*

Ces objectifs doivent être clairement indiqués, mais cela ne suffit pas. Il y a une certaine forme de contrat à passer entre les élèves et l'enseignant. On ne peut parachuter « nos objectifs » si l'on veut que les élèves en fassent « leurs projets ». Il faut aussi que les « règles » d'organisation de la classe deviennent des « projets » pour les élèves. Pour ce faire on peut utiliser, par exemple, des éléments de la méthode Gordon que l'on trouve dans « Enseignants efficaces[14] ». La gestion mentale montre que cette organisation est essentielle non seulement du point de vue de l'organisation et du bon fonctionnement de la classe, mais aussi du point de vue cognitif.

L'organisation d'un cours comme une suite de projets pour les élèves

Ces projets globaux fixés, il y a aussi la succession des projets que doit poursuivre un élève pendant un cours : ici je dois faire attention, c'est-à-dire me redire[15] ce que j'entends pour lui donner un sens, ici j'écoute pour appliquer, ici je regarde cette figure avec un œil de mathématicien, là je dois mémoriser cette figure pour la comparer avec d'autres

14. Thomas Gordon, *Enseignants efficaces*, Le Jour Editeur, Montréal, Québec, 1981.
15. Ce n'est bien sûr, qu'une forme particulière d'attention.

que j'ai déjà mémorisé etc. Tous ces projets orientent efficacement l'évocation des élèves. En une heure de cours il peut y avoir quinze ou vingt projets différents.

Comment organiser un cours pour qu'il devienne une suite de projets pour les élèves ? Quels sont ces projets ? Comment les élèves peuvent-ils en contrôler les modalités ?

Un cours est une suite de projets que les élèves réalisent. Ces projets doivent être explicités par le professeur. Ils constituent l'ossature de l'organisation pédagogique du cours. L'organisation d'un cours comme « une suite de projets pour les élèves » peut entraîner un changement très profond de son organisation. Cela demande une organisation souvent très planifiée. Il ne suffit pas en effet de dire aux élèves : « Ici vous devez avoir le projet de mémoriser... ». Il faut créer des situations dans lesquelles les élèves doivent mémoriser, ici une situation où ils doivent faire des liens, là une situation où ils doivent mobiliser des connaissances antérieures. C'est en revenant sur ce qu'il sont fait dans ces circonstances qu'ils vont prendre conscience de l'efficacité de certains gestes mentaux. La description des gestes mentaux faite par A. de La Garanderie est avant tout un guide destiné à structurer un ensemble d'activités pour que les élèves aient à accomplir les gestes mentaux en question. Il faut aussi définir les activités mathématiques en terme de projet évocatif. Cela demande d'analyser la démonstration en mathématique et le calcul algébrique à partir des projets évocatifs. C'est un travail d'analyse passionnant et efficace pour la réussite des élèves. Une fois que les élèves auront effectué ces gestes mentaux et qu'ils en auront compris l'efficacité à travers ces parcours obligés, ils vont faire de ces projets leurs projets et augmenter ainsi leur propre espace de liberté. Il faut, en particulier pour des élèves faibles, avoir une stratégie de pratique et de prise de conscience des gestes mentaux qui fasse partie intégrante du cours.

Se donner le projet de « faire des maths »

Plus précisément, celui qui fait efficacement et avec plaisir des mathématiques se plonge dans une activité très particulière, qui a son domaine, ses règles, ses buts. Il connaît les caractéristiques de l'activité mathématique ; de nombreux élèves ont une idée complètement fausse de ce qu'on fait quant on « fait des maths ». Cette idée fausse devient un projet qui les éloigne de toute possibilité de réussite en mathématiques !

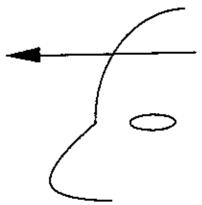
Quelles sont les caractéristiques de l'activité mathématique ? Quel est le projet du mathématicien ? En particulier, comment décrire les projets qui dirigent l'évocation du mathématicien ? Quels sont les projets d'un mathématicien qui veut faire une démonstration ? D'un mathématicien qui utilise l'algèbre ? D'un mathématicien qui a le plaisir de faire des mathématiques ?

Pour répondre à ce genre de questions, il faut mettre en évidence le plus souvent possible ce qui caractérise l'activité mathématique quand on démontre un théorème ou que l'on résout un problème. Au moment de faire une démonstration, les élèves auront alors des projets d'évocation qui vont les conduire dans la recherche de la solution. On peut aussi construire des activités qui ont pour but essentiel de montrer ce que c'est que faire des mathématiques. Ces activités peuvent ensuite servir de référence et guider le projet de faire des mathématiques. Il est bon aussi que les élèves voient le professeur en train de chercher, de tâtonner, l'entendent réfléchir tout haut, même si cela doit faire appel à ses talents d'acteur.

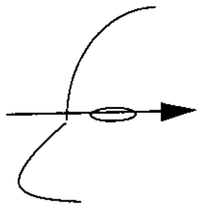
La conceptualisation

Le projet d'intérioriser un concept est le projet le plus important en mathématique, car tout est « concept » en mathématique. Un concept mathématique est ce que j'avais appelé « un objet mathématique », objet purement mental qui ne se confond avec aucune représentation concrète. Un trait suggère la notion de droite, mais n'en n'est pas une représentation fidèle. Une flèche est souvent associée à une fonction, mais une fonction ne peut pas se représenter, ne se voit pas, c'est une idée. Un triangle n'a pas non plus d'existence concrète. Quand on dessine un triangle au tableau, c'est pour parler d'un triangle idéal qui seul a une existence mathématique. Le point qu'on représente au tableau cache le point réel tout en le mettant en évidence. La mathématicien, même le mathématicien en herbe, regarde les objets concrets pour reconnaître des objets mentaux qui sont avant tout un ensemble de propriétés.

On voit les malentendus qui pourraient se produire si, au lieu de faire exister en soi un « objet mental » on faisait exister « l'objet concret » qui est censé le représenter. On en viendrait à « chosifier » les mathématiques, à faire un contresens. Il est donc de la première importance que les élèves développent un « regard » c'est-à-dire une évocation particulière, celle du mathématicien, qui projette des relations sur des objets concrets. On peut schématiquement représenter ainsi les deux formes de « regard » :



1. *Projection* :projection d'une relation intériorisée dans un schéma



2. *Intériorisation* : construction d'un schéma à partir d'une situation externe

Ce geste de « projection » est d'ailleurs pour Jean-Pierre Changeux[16] une des caractéristiques du fonctionnement du cerveau humain : « Nous ne retenons en fait qu'une partie des caractéristiques d'une œuvre ou d'un objet. Quels sont les traits enregistrés ? La thèse que je développe, c'est que le cerveau fonctionne sur un mode projectif, il produit des représentations internes, des hypothèses, des modèles, des attentes et les compare avec le monde extérieur. Lorsqu'il y a adéquation, "congruence entre représentation interne et le monde extérieur", la mise en mémoire peut se produire ».

Or les élèves croient souvent qu'apprendre, c'est intérioriser et seulement intérioriser. Il faut donc aussi apprendre à construire les représentations internes et entraîner à la projection.

Quels sont les gestes mentaux qui assurent l'acquisition d'un concept mathématique ? Quels sont les gestes mentaux qui assurent une pensée « productive » en résolution de problème ?

C'est la question fondamentale. Elle demeure largement ouverte : comment décrire les gestes mentaux de la conceptualisation ? En mathématiques, les étapes suivantes me semblent importantes. Pour conceptualiser, il faut d'abord *intérioriser* et *personnaliser* les représentations, c'est-à-dire donner une traduction personnelle aussi bien dans ses modalités (l'image, le son, le ressenti, le mouvement) que dans la forme. Faire ce geste mental consiste à tisser des liens entre ce qui a déjà un sens et ce qui est nouveau. C'est une description faite à partir du langage intérieur. Certaines de ces traductions personnelles peuvent être des associations plus ou moins farfelues, des métaphores, des comparaisons. Ce geste va charger de sens ce qui a été intériorisé. Il oblige souvent à remonter jusqu'à ce qui a un sens. Il est indispensable sur le chemin de la conceptualisation. Il faut ensuite *mettre en évidence des invariants*, ce qui implique une comparaison à partir de ce qui est commun et de ce qui est différent dans

16. J.P. Changeux, *Raison et plaisir*, Edition Odile Jacob, p. 129.

deux ou plusieurs situations. Ces situations peuvent être de nature verbale, visuelle, dynamiques ou non.

Ce geste mental est nécessaire pour assurer la formation de concepts par le regroupement de propriétés diverses sous un même nom. En mathématiques nous croyons que cette définition du concept est insuffisante pour le rendre actif et en faire un outil de résolution de problèmes. Il faudra ensuite projeter ce qui est devenu un objet mental. Il faut souvent un entraînement particulier pour mettre en évidence des invariants, le travail de recherche d'invariants devant se faire sur des objets déjà évoqués. L'entraînement à ce geste passe donc par la recherche et l'expression de ce qui est semblable et de ce qui est différent dans des situations différents, quel que soit l'ordre dans lequel on fait cette recherche.

Il faut ensuite *traduire* d'une forme dans une autre : on met ainsi en place un processus particulièrement efficace en mathématiques. Ce processus consiste à « exprimer autrement mais d'une façon équivalente ». C'est en exprimant de façon analogue mais sous une autre forme que l'on met en évidence des propriétés, que l'on fait des rapprochements et que l'on trouve des solutions. Ce geste demande l'exercice du geste précédent. Une transformation n'a d'intérêt que si on la considère sous le double point de vue de ce qui est transformé et de ce qui est conservé. Avant de produire de telles transformations, il faut en avoir rencontré et s'être exercé à en isoler les invariants. La réexpression est donc directement associée à la conceptualisation. C'est aussi un processus particulièrement efficace en mathématiques, puisqu'on trouve souvent des solutions simplement en réexprimant, jusqu'à ce qu'on trouve une expression particulièrement simple, comme on le fait en résolvant des équations par exemple. Une réexpression n'est pas seulement verbale : elle peut être complètement graphique ou schématique[17].

Enfin il faut *projeter des structures connues dans des situations nouvelles*. Ce geste permet de reconnaître dans une situation nouvelle une structure ou une propriété mathématique intériorisée. Ce geste de « projection » va faire du concept un « objet mathématique » tendant à se projeter dans une réalité nouvelle. Au cours de projections successives, l'objet mathématique va se complexifier et se transformer. La projection oblige à un enrichissement personnel d'une notion déjà acquise dans un certain cadre pour l'adapter à un cadre nouveau. Les deux cadres ne sont pas strictement équivalents. Les concepts évoluent en partie par projections successives.

La résolution d'un problème se fait souvent par projection d'un objet mathématique intériorisé sur une situation nouvelle. Cette projection va

17. On trouvera une description de ce que peut être une représentation graphique d'un concept dans : R. Arnheim, *Visual Thinking*, University of California Press, 1984.

permettre la résolution du problème. Elle est aussi l'outil des découvertes en mathématiques : une situation confuse devient soudain limpide parce qu'on vient d'y projeter une structure mathématique qui transforme l'évocation qu'on en fait. C'est un geste fondamental de compréhension. Si la réussite de la projection illumine tout d'un coup une situation confuse, elle procède aussi d'essais infructueux. Pour s'entraîner à projeter, il faut avoir en tête un objet mathématique, donc un objet mental. La situation concrète sur laquelle la projection doit se faire doit, elle aussi, être évoquée dans tous ses détails. Pour que la projection soit possible, il faudra accepter de faire évoluer un peu l'objet mental. Il faut donc que l'objet mental soit, dès sa formation, considéré comme susceptible d'évolution. Sans entraînement particulier, la projection peut sembler être un geste mental mystérieux qui ne se borne pas à reproduire ce qui est déjà fait mais y ajoute du sens.

De nombreux enfants en difficulté ont une conception totalement passive des mathématiques. Ils peuvent résoudre des exercices mais jamais de problèmes. Ils ne font jamais de projections telles que nous venons de les décrire. Les notions mathématiques qu'ils utilisent sont figées et ne peuvent s'appliquer que dans des cadres déjà rencontrées. Ils ne « projettent » jamais. C'est par la projection que se crée une dynamique bien particulière aux mathématiques : la tendance à élargir et à unifier sans cesse le champ de ses applications.

Reconnaître une notion mathématique dans une situation nouvelle, sans explications d'un tiers, mais par évocation de plus en plus précise de la réalité et de l'idée mathématique, constitue un entraînement direct à la projection. Cet entraînement est indispensable à la formation de concepts mathématiques. Dans ce qui précède, j'ai tenté d'indiquer certaines étapes qui conduisent à la projection. L'organisation du cours qui découle de cette description n'est pas chose facile. C'est un domaine où la gestion mentale éclaire une problématique, mais où l'organisation pédagogique correspondante reste, dans une grande mesure, à construire.

Les transferts

Le transfert est un des problèmes les plus difficiles. En général, les transferts ne se font pas. Pourtant, d'une certaine façon, un savoir qui ne se transfère pas est un savoir mort. Le transfert est pourtant un problème d'une importance capitale, en particulier si l'on se place au niveau des mathématiques.

Avec Gagné[18], nous distinguerons le transfert vertical du transfert horizontal. Le transfert vertical est l'utilisation qu'une personne fait de ses connaissances antérieures, pour acquérir une nouvelle connaissance dans le même domaine. Le transfert horizontal est l'utilisation de connaissances, pour résoudre un problème nouveau ou réaliser une tâche nouvelle dans un autre domaine. Le « transfert vertical » est la condition même de l'apprentissage en mathématiques, dès qu'une connaissance procède d'une autre connaissance.

Distinguons[19] encore le transfert « spontané » du transfert « informé ». Dans le transfert spontané, la charge de faire le transfert est laissée à l'élève : ce transfert ne se fait que dans 30 % des cas. Le transfert « informé » se produit quand ont été rendues explicites les conditions d'application de ce qui est appris dans des contextes variées. On obtient alors des transferts dans 75 % des cas. Autrement dit, le transfert a d'autant plus de chance de se faire, si l'élève se donne le projet de faire des transferts au moment où il acquiert une connaissance. Ces transferts doivent pouvoir s'expérimenter dans des exemples de problèmes différents mais qui ont des similitudes de structure[20].

Toujours selon les recherches rapportées par Jacques Tardif, les conditions pour qu'un transfert s'effectue d'un domaine de connaissance à un autre exigent aussi que les élèves aient le projet[21] de faire ces transferts avant d'avoir à les faire, que les deux domaines de connaissance soient bien connus, et que les conditions d'application de ce qui est appris dans un contexte vers un autre soient bien mises en évidence. On retrouve deux domaines privilégiés de la gestion mentale, le projet et la précision de l'évocation. Ceci impose aussi que des professeurs de disciplines différentes travaillent ensemble, développent un même langage, et qu'ils donnent au « projet » toute son importance. A l'intérieur même de la discipline mathématique, il faut préparer les transferts verticaux. Nous avons signalé l'importance de faire remonter à la conscience certaines connaissances pour que les connaissances nouvelles puissent se rattacher à ces connaissances déjà acquises. On voit maintenant que ce travail doit être préparé par un projet antérieur. Pour ma part, la question du transfert, et même du transfert « vertical », est loin d'être résolu. C'est en partie parce que je n'avais pas compris l'importance d'en faire un projet pour les élèves dès l'acquisition d'une connaissance nouvelle. Ce

18. Gagné, *The Condition of Learning*, New York, HRW, 1970.
19. J. Tardif, *Pour un enseignement stratégique*, Logiques, Montréal, 1992, pp. 270 et suivantes.
20. Voir en particulier le résumé que fait de cette question Jacques Tardif, *Ibid.*
21. J. Tardif n'utilise pas ce terme, mais ce qu'il dit revient à dire que les élèves doivent avoir ce projet.

projet doit être explicité et mis en application au moment même de l'acquisition de cette connaissance nouvelle, et non pas après.

Deux questions demeurent donc : comment faire du « projet de transfert vertical » un projet constant pour l'élève en mathématiques ? Comment faire du « projet de transfert horizontal » un projet pour les élèves et les enseignants ?

L'analyse qui précède met en évidence l'importance d'avoir le projet de transférer avant d'avoir à effectuer le transfert. C'est dès l'acquisition d'une connaissance qu'il faut avoir le projet de la transférer. On retrouve là un principe essentiel de gestion mentale. Pour ma part je ne suis pas satisfait des moyens pratiques de donner corps à ce projet pour les élèves. La question reste donc largement ouverte, mais des principes sont établis pour aborder la question.

CONCLUSION

Il reste bien d'autres points à considérer et je n'ai abordé que ceux qui me semblent directement reliés au sens de l'activité mathématique. On peut faire de la gestion mentale sur de mauvais objets. Un élève en difficulté à tendance à développer des automatismes, et la gestion mentale peut renforcer cette tendance. Les objets mathématiques sont des objets mentaux : ce serait un contresens que de leur substituer des objets concrets mémorisés ; on en viendrait à « chosifier » les mathématiques, donc à leur enlever toute signification. Les représentations en mathématiques ne sont pas des calques d'une réalité concrète, mais une symbolisation des objets perçus. Les mathématiques demandent de faire le lien entre des objets mentaux, une langue mathématique, et des représentations mathématiques d'apparences plus concrètes. Avant d'utiliser les techniques de gestion mentale il faut analyser non seulement le processus de communication entre le professeur et les élèves mais aussi le processus d'acquisition et d'intégration des mathématiques, pour décrire les conditions mentales de la manifestation de tout ce qui concerne la compréhension. Ce n'est qu'après qu'on pourra imaginer une organisation pédagogique d'apprentissage de l'évocation mathématique. Cette organisation doit avoir les caractéristiques suivantes :

— les élèves prennent conscience de certaines de leurs façons de faire du point de vue mental ;

— l'enseignant crée des situations qui obligent les élèves à effectuer un travail mental précis et ce travail doit se révéler efficace à leurs yeux ;

— la présentation du cours est modifiée pour permettre que le travail mental d'appropriation, de compréhension et d'attribution de sens soit rendu possible pour les différents types d'élèves de la classe.

Se trouve alors dégagé un espace de liberté dans lequel l'élève a la possibilité d'expérimenter intellectuellement et de construire des représentations des objets mathématiques et des représentations des procédures. En particulier, il faut définir et développer une « évocation mathématique » et apprendre à représenter ce qu'actuellement on ne représente pas (ou on représente mal) en mathématiques. Il reste en particulier à créer un langage graphique, exprimant ce que j'ai appelé des « stratégies complexes ». Si ces conditions sont réalisées, on peut dire qu'il y a eu « gestion mentale ». On aura créé un type de relation qui permette à des élèves dans une classe, d'évoluer du point de vue cognitif en mathématiques, tout en développant leur connaissance d'eux-mêmes et en améliorant leur image personnelle, et ceci en se plaçant du point de vue pédagogique seulement. Ce n'est pas un travail facile. Cet objectif sera d'autant plus facilement atteint qu'un travail de gestion mentale dans plusieurs disciplines en même temps est effectué par des professeurs se concertant. Dans la mesure où les conditions précédentes sont réalisées, on pourra alors faire une évaluation du point de vue cognitif. Nous n'en sommes pas là. Le travail d'analyse et d'organisation pédagogique n'est pas terminé.

Une idée nouvelle prouve son importance dans la mesure où elle permet d'envisager des questions anciennes sous un angle nouveau, de poser de façon inédites des problèmes de recherche et d'obtenir ensuite des réponses nouvelles et originales. Nous sommes dans la période où la gestion mentale, c'est-à-dire la distinction entre évocation et perception, la prise en compte du projet et l'obligatoire prise en compte de la personnalité et des habitudes mentales de chaque individu, permettent de poser autrement des problèmes particulièrement importants, en ce qui concerne la didactique des mathématiques. Nous ne sommes pas encore au moment où la gestion mentale donne toutes les solutions, mais où elle pose des questions qui touchent à l'essentiel.