Alain Taurisson

PENSÉE MATHÉMATIQUE ET GESTION MENTALE

POUR UNE PÉDAGOGIE DE L'INTUITION MATHÉMATIQUE

Préface d'Antoine de La Garanderie

BAYARD ÉDITIONS

DU MÊME AUTEUR

Les gestes de la réussite en mathématiques à l'élémentaire, Agence d'Arc inc, Montréal, 1988.

Du boulier à l'informatique, Presse Pocket/Explora, Paris, 1990.

Alain Taurisson est professeur à l'université du Québec à Montréal. Il enseigne les mathématiques à des élèves du secondaire, à des enfants en difficulté scolaire, à des professeurs en formations initiale et continue et dans le cadre de la formation des adultes. Il travaille en France et au Québec.

Alain Taurisson

Gestion mentale et pensée mathématique

Préface
Antoine de La Garanderie

Bayard Éditions

ISBN : 2.227.12531.4

22, cours Albert-Ier, 75008 PARIS

Bayard Éditions est une marque du département Livre
de Bayard Presse.

Remerciements

Je tiens à remercier Annette Dugas sans qui ce livre n'existerait pas, Olga Périssé, dont les commentaires, la patience et l'exigence m'ont été d'une aide précieuse, Anne-Marie Liger qui m'a permis de rencontrer les jeunes qu'elle a pris en charge au CERM, ainsi que tous les élèves québécois ou français qui m'ont apporté la matière de ce livre.

Préface

Alain Taurisson n'est pas un simple utilisateur, même très compétent, de ce que l'on entend par l'expression de « gestion mentale ». Il a, en effet, mis à l'épreuve de son expérience, de sa culture et, surtout, de sa pénétration d'esprit les concepts qui la fondent et les principes qui la conduisent. C'est donc avec ses enrichissements personnels qu'il invite à la vivre.

Ces mérites suffiraient à justifier l'intérêt que tout enseignant, tout chercheur devraient porter à ce livre que je suis heureux d'accueillir dans notre collection et de préfacer.

Ce ne serait pas assez dire. Le mérite suprême de ce livre se trouve dans l'effort que Alain Taurisson accomplit en présentant une véritable pédagogie de l'intuition mathématique. Comment faire pour maîtriser la démonstration d'un théorème ? Comment faire pour comprendre un problème d'algèbre ou de géométrie ? À ces questions, Alain Taurisson apporte des réponses d'une indiscutable rigueur. Ces « comment faire » concernent les gestes mentaux que l'élève doit mettre en œuvre pour rencontrer la compréhension. Ces gestes mentaux sont les vrais chemins de l'intuition mathématique. Beaucoup de ceux qui échouent à l'atteindre estiment à tort qu'elle n'est qu'effet de l'aptitude pure. Il suffit de lire les analyses de Taurisson pour constater de la façon la plus nette qu'il s'agit d'abord et avant tout de s'ouvrir à la pratique de ces gestes mentaux pour acquérir ce qu'on appelle le sens mathématique.

L'orientation des élèves vers les sections nobles du baccalauréat découle de leurs résultats en mathématiques. Si l'on aperçoit qu'être bon dans cette discipline n'est pas un effet génétique, mais dépend de l'intelligence pédagogique et de la volonté de l'élève, on aura fait un grand pas vers l'égalité des chances. C'est bien là l'apport de ce très beau travail d'Alain Taurisson.

Antoine de La Garanderie

I

Comprendre et déterminer le processus d'évocation

L'enfant qui éprouve des difficultés à l'école, et en particulier en mathématiques, est un enfant solitaire, au moins du point de vue cognitif. Face au problème qu'on lui pose, à la leçon qu'il doit comprendre, il se retrouve seul et vide. Il croit que la réponse est ailleurs, quelque part, hors de lui, inaccessible. Alors qu'il peut très bien savoir guider un canoë dans les rapides, démonter son vélomoteur, ou savoir où se placer sur un terrain de rugby ou sur une patinoire de hockey, il va se sentir en mathématiques comme un étranger dans un pays dont il ignore la langue et les habitudes. Tout ce qui lui reste à faire, c'est d'imiter, de faire semblant, de donner le change. De là un comportement mécanique et absurde : du mécanique plaqué sur du vivant, comme disait Bergson en parlant du comique. C'est « l'automaths » de Stella Baruk, cet être coupé de lui-même, coupé de l'activité mathématique et coupé de l'enseignant, qui aborde un problème mathématique comme Tati traversait ses films : toujours ailleurs, souvent muet, ignorant superbement le contexte qui lui semble le fruit d'un hasard contraire.

J.,15 ans, qui vivait les mathématiques comme un monde livré à l'arbitraire et au hasard, m'a confié un jour : « Tu sais, les profs, ils font tout sans réfléchir, au hasard. On ne les voit jamais chercher. Mais pour eux ça marche ! » concluait-il, vaguement admiratif. Lui aussi faisait tout « au hasard », mais ça ne marchait pas.

Il n'y a pas que les élèves en difficulté qui ont cette impression d'impuissance et d'absurdité face à l'univers mathématique : des enseignants, et de bons enseignants, vous disent quelquefois qu'ils ont toujours passé leurs examens avec un vague sentiment de culpabilité. Ils savaient répondre aux questions mais avaient profondément le sentiment de ne pas « comprendre ».

Les mathématiques se voudraient un langage universel, cohérent, simple et accessible à tous. Mais les enfants nous disent que c'est le monde compliqué de l'arbitraire et de l'absurde.

Faire des mathématiques est une activité qui a un sens pour celui qui la pratique avec plaisir. Aider un élève en difficulté, c'est d'abord partir avec lui et pour lui à la recherche du sens des mathématiques. Ce sens passe par la capacité de se donner des représentations de certains aspects de la réalité, des opérations, des concepts mathématiques, des problèmes. Enseigner les mathématiques consiste pour une large part à amener les élèves à se donner des représentations.

Commençons par dire que nous ne considérons pas l'élève comme un « objet » sur lequel on agit, mais comme un sujet qui peut maîtriser peu à peu ses moyens d'apprendre. Cela va nous conduire à l'aider à devenir de plus en plus conscient de certains processus intellectuels.

Il ne s'agit pas d'exploration affective, travail que seul un spécialiste pourrait conduire, et un enseignant n'est pas et ne peut être ce spécialiste. Il s'agit d'une exploration de l'activité intellectuelle dans ce qu'elle a de conscient, ou de ce qui peut en remonter à la conscience ; et cela est bien du ressort de l'enseignant. Nous n'affirmons pas que les aspects affectifs n'ont aucune part dans l'activité intellectuelle, bien au contraire. Même en mathématiques, ils jouent un rôle très important. Il suffit de lire par exemple *Mathématique et affectivité* de Jacques Nimier [1] pour s'en convaincre s'il en était besoin. Mais un enseignant ne peut intervenir directement que sur l'aspect cognitif, ce qui relève directement de sa compétence. Il s'agit presque d'une affaire d'éthique professionnelle. Et en plus, une amélioration de l'efficacité intellectuelle entraîne bien souvent des changements affectifs profonds. Un enfant qui a compris qu'il possède seul la maîtrise de ses moyens d'apprendre, qui apprend à les reconnaître, à les modifier et à les utiliser acquiert peu à peu une meilleure confiance en lui.

L'importance des aspects conscients du processus d'apprentissage

Apprendre reste un processus mystérieux, même pour celui qui apprend, et surtout s'il apprend avec facilité. Cependant les activités intellectuelles ne se font pas en dehors de nous. L'élaboration d'une représentation mentale est une activité individuelle, interne que personne ne peut faire à notre place. Mais la partie consciente de ce travail peut être partagée. Certaines de ses modalités peuvent être décrites, comparées, expérimentées. On peut créer des circonstances favorables à certaines formes de représentation mentale. Même si l'acte de se représenter mentalement est un travail s'effectuant dans l'intimité de la conscience, on peut aider à le faire. C'est ce qu'on appelle « enseigner ». C'est du moins le sens que nous donnerons à ce mot.

Au-delà de cet aspect conscient de l'activité intellectuelle, il existe des mécanismes qui nous échappent complètement, comme nous échappe le rôle du nerf optique

1. Collection Laurence Pernoud, Éd. Stock.

dans la vision. C'est là que doit se faire la frontière entre spécialistes : le peintre s'intéresse à l'impression visuelle, l'opticien au fonctionnement de l'œil alors que le neurochirurgien s'intéresse à l'aire du cerveau réceptrice du message transmis par le nerf optique. Nous laisserons de côté les aspects qui ne peuvent devenir conscients ; cela ne revient pas à nier leur importance, mais il s'agit de limiter notre domaine d'intervention.

Ni théorie ni méthode, mais des moyens d'observer et d'agir

Nous allons nous placer strictement sur le plan de l'intervention pédagogique. Notre but n'est pas de faire une théorie, mais de donner des moyens de regarder et d'agir face à un élève ou à une classe. Il s'agit encore bien moins de définir une méthode : les cas sont si différents, les situations si variables, qu'une « méthode » est vite ridicule : encore du mécanique plaqué sur du vivant. En revanche, on peut apprendre à faire des hypothèses sur l'origine des difficultés ou des succès des élèves, à vérifier ces hypothèses et à agir en conséquence, ce qui revient à augmenter le nombre des possibilités d'intervention et à les adapter. Comment donner aux élèves des moyens de se construire des représentations des « objets mathématiques », des « algorithmes », qui vont leur permettre de manipuler la « langue mathématique » et de « résoudre des problèmes », telle est la principale question à laquelle nous allons essayer de répondre.

L'évocation mathématique doit s'exercer sur des objets mathématiques

Pour donner un sens aux mathématiques, il ne suffit pas d'évoquer un cours, il faut pratiquer cette évocation sur les « objets » qui favorisent la compréhension. On peut, avec la meilleure volonté du monde, faire pratiquer le travail mental sur les mauvais objets et conduire non pas à une compréhension réelle mais à l'effet diamétralement opposé. Nous ne pouvons donc pas imaginer favoriser la compréhension en mathématique sans tenir compte de la nature particulière de cette discipline. On n'apprend pas, on n'enseigne pas les mathématiques comme le français, l'histoire ou le tennis.

L'enseignant n'est pas un psychologue

Enseigner c'est agir, et il nous faut bien enseigner. Nous ne pouvons compter sur « la seule nature de l'enfant pour le conduire au stade formel et à la structure mentale adulte » [2]. Et comme l'affirmait Gréco, « en aucun cas, les théories psychologiques ne suffisent à engendrer des préceptes pédagogiques ». Si le psychologue peut se permettre de n'être qu'un observateur, l'enseignant doit agir pour révéler les potentialités de l'élève. Il le fera d'autant mieux s'il le fait à partir de ce qui peut être rendu explicite quant aux moyens d'apprendre de ce dernier.

Bien que ce soit une préoccupation assez nouvelle dans le milieu scolaire, il est admis que deux individus ne réagissent pas de la même façon du point de vue affectif. Dans certaines écoles, on a fait des progrès considérables pour prendre en compte ces différences. Par contre, même si l'on dit qu'il y a bien des façons d'apprendre, on ne se donne pas toujours les moyens de les prendre en compte. Pourtant la « diversité des formes d'intelligence » est considérable. On ne pourra devenir un enseignant plus efficace que si l'on apprend à connaître, à tenir compte et même à profiter de ces différences. C'est un travail difficile.

---

2. Guy Avanzini, 1990.

Apprendre en restant soi-même

Il n'y a pas d'apprentissage véritable sans que l'on puisse donner un sens à ce que l'on fait. Il n'y a pas non plus d'apprentissage véritable si l'on doit y laisser une part importante de soi-même. Ces deux aspects sont souvent reliés. Si les mathématiques apparaissent comme une suite de gestes à accomplir dont les finalités échappent, si les moyens de les apprendre semblent tellement différents, tellement étranges et étrangers, l'élève aura l'impression qu'on lui demande de pénétrer dans un monde absurde et même dangereux dont il est exclu au départ. Nous sommes donc obligés de relier l'apprentissage des mathématiques non pas à la « vie courante », ce qui conduit souvent à des absurdités, mais à certains aspects de la « vie intérieure » consciente des individus.

Les élèves en difficulté sont toujours fort étonnés que l'on s'intéresse à eux et aux moyens mentaux qu'ils utilisent dans la vie quotidienne avant de passer aux mathématiques. Ils sont encore plus étonnés quand on leur montre que certains des gestes mentaux qu'ils effectuent, quand ils font du sport par exemple, leur permettent de commencer à apprendre les mathématiques. Un élève a souvent l'impression d'être un « objet » à l'école. Si on lui demande tout d'un coup de partir de ce qu'il est et de ce qu'il fait déjà pour apprendre, il devient « sujet » et, qu'il le veuille ou non, responsable.

Le projet est l'organisateur des fonctions cognitives

On trouve de plus en plus de parallèles entre le traitement de l'information effectué par un ordinateur et le fonctionnement cognitif d'un être humain, analogie intéressante et pouvant conduire à distinguer cinquante ou cent fonctions cognitives différentes. Mais programmer un ordinateur revient à activer des fonctions très spécifiques dans un ordre donné. Un être humain à qui on prescrirait cette façon de faire ne connaîtrait même pas le sens de son action. Par contre, s'il veut réaliser un projet, il va mettre en œuvre et coordonner spontanément l'action de nombreuses fonctions cognitives. Alors que l'on *programme* un ordinateur, un être humain *se donne un projet* pour agir ; et il donne en même temps un sens à son action. Le projet dirige, coordonne et légitime l'activité intellectuelle. C'est aussi un moyen d'intervention au niveau de la classe qui concerne chaque individu. Une part essentielle de ce livre concerne le projet de « faire des mathématiques ».

LA PERCEPTION ET L'ÉVOCATION

Nous croyons souvent qu'il suffit de parler pour être compris, ou au moins être « entendus », ou qu'il suffit de montrer pour que ce que nous montrons soit « vu ». Tous ceux qui enseignent ou qui simplement tentent de communiquer à d'autres des idées ou simplement des faits savent qu'il n'en est rien.

Antoine de La Garanderie a distingué deux temps dans le processus d'intériorisation d'un événement : la perception et l'évocation. Cette distinction a le mérite d'avoir des conséquences pédagogiques très importantes. Si enseigner[3] c'est « transmettre à un élève de façon à ce qu'il comprenne et assimile », l'évocation va nous permettre d'isoler ce moment de compréhension et d'assimilation, d'en décrire certains aspects pour lui donner toute sa place.

La perception

Ce qui nous parvient du monde extérieur laisse une impression par l'intermédiaire de nos cinq sens : impression sonore, visuelle, olfactive, tactile ou gustative. Nous

---

3. Dictionnaire Robert.

appellerons *objet externe* une situation, un événement, une image, un texte, un discours qui va laisser en nous des traces à travers nos organes des sens.

Les événements extérieurs ont aussi un écho que nous ressentons dans nos muscles ou dans notre affectivité : en regardant un danseur faire un pas, il se peut que nous ressentions nos muscles réagir à l'image de ceux du danseur ; un simple regard peut provoquer en nous tristesse ou joie.

Ces impressions, échos immédiats des événements extérieurs, vécues dans l'instant, sont le résultat de la perception. C'est sur ce matériel ressenti que va s'exercer l'évocation dont nous allons maintenant parler.

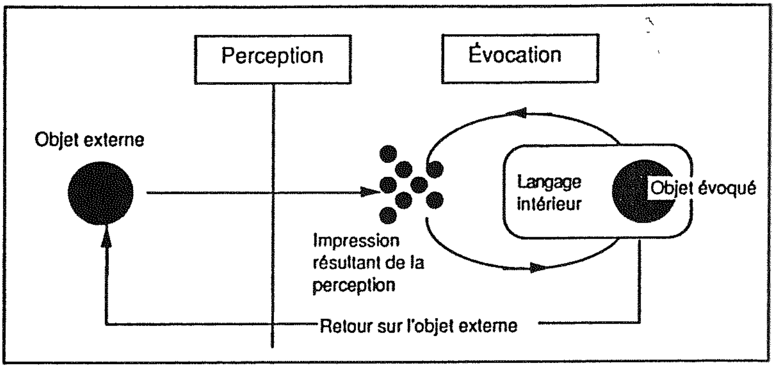
L'évocation

L'évocation est un retour intérieur et actif fait sur ces impressions pour les structurer, leur donner un sens, les interpréter et les mettre en relation avec des éléments déjà connus, ou simplement pour les coder et les garder en mémoire. C'est le deuxième temps, celui où l'individu, à partir des traces perceptives, fait une interprétation personnelle qui va constituer pour lui le sens de la réalité d'un événement extérieur.

L'évocation est une activité interne, invisible pour l'observateur. Le processus lui-même peut être « inconscient » pour celui qui l'effectue, inconscient voulant simplement dire ici qu'il n'en a pas conscience comme c'est le cas de la multitude des gestes habituels que nous effectuons chaque jour. Cependant il est possible de prendre conscience et d'agir sur certaines modalités de l'évocation. Quand on tente de donner une explication à un élève, et qu'il ne comprend pas, on tend à affirmer globalement qu'il « ne comprend pas », qu'il « n'écoute pas » ou même « qu'il est bête ». Il se peut plus simplement que sa façon particulière d'évoquer fasse que l'information ne parvient pas à sa conscience. Si c'est le cas, ses capacités intellectuelles n'ont même pas l'occasion de s'exercer puisque leur source est tarie.

Au moment de l'évocation, il y a création d'images mentales chargées de sens, de nature visuelle, auditive, verbale ou kinesthésique. Nous appellerons kinesthésique une évocation dont la nature est un ressenti, que ce soit un ressenti physique, musculaire ou émotif. Pour qu'il y ait évocation kinesthésique, il faut que ce ressenti nous permette de nous dégager de l'instant présent pour accéder à la signification de l'impression première. Par exemple, un élève peut parler du sommet d'un triangle comme d'une pointe piquante. Ce terme fait référence à une impression physique. Cette impression est pourtant une évocation: l'élève ne s'est jamais piqué sur un triangle. Il s'agit bien d'un retour sur une impression visuelle, le triangle, qui provoque un écho au niveau du toucher, et, sur cette évocation, il pourra greffer une définition plus mathématique qui aura un sens pour lui.

Ces images évoquées existent en l'absence de l'objet externe; elles permettent d'avoir conscience d'une image visuelle, de sons entendus, de paroles prononcées, d'émotions ou d'impressions de mouvements en l'absence de tout stimulus externe ou de tout mouvement physique. Dans tous ces cas, nous parlerons d'*images mentales*. Toute notre activité intellectuelle se fait à partir des images mentales et non pas des objets externes.



Sur ce graphique, nous avons représenté l'évocation qui part d'un objet externe et produit une *impression*. À partir de cette impression, et par l'intermédiaire du langage intérieur, se construit un objet évoqué. Souvent, il est nécessaire de revenir à l'objet externe pour créer des impressions plus précises permettant au processus d'évocation de se faire avec plus de précision.

Nous avons représenté par un ensemble peu structuré « l'impression résultant de la perception » alors que l'objet évoqué est beaucoup plus structuré. Nous voulons ainsi indiquer que c'est le travail d'évocation qui donne sa structure à l'objet évoqué et non pas la perception. On voit aussi que l'évocation porte sur des impressions internes et que le langage intérieur concerne des objets déjà évoqués et non pas des objets externes. Le retour sur l'objet externe oblige à affiner la perception et rend plus sensible le canal sensoriel correspondant. Le musicien a peut-être au départ une meilleure oreille que celui qui ne l'est pas, mais le retour qu'il fait consciemment sur ce qu'il entend « ouvre » son oreille et améliore sa perception.

LE LANGAGE INTÉRIEUR

Le processus d'évocation ne se limite pas à la formation « d'images mentales ». Il faut, pour qu'il y ait « assimilation », que le nouvel objet soit mis en relation avec d'autres images, d'autres mots ou énoncés, d'autres « objets mentaux ». Cette assimilation se fait par l'intermédiaire d'un langage intérieur, propre à chacun d'entre nous. Il doit être adapté à cet objet nouveau. Enseigner les mathématiques passe par la construction d'un langage intérieur à la fois personnel, dans la mesure où il doit correspondre à des caractéristiques individuelles, et universel dans la mesure où il doit permettre l'assimilation de problèmes mathématiques.

À titre d'exemple, nous pouvons prendre l'addition qui peut être associée à une réunion de deux collections d'objets. Ce processus permet de reconnaître une addition dans une situation concrète et d'utiliser l'opération mathématique, ou simplement la table d'addition, pour résoudre le problème. Ce processus est un élément de ce que nous appelons le langage intérieur.

Préciser la forme, le contenu et la mise en œuvre de l'évocation et du langage intérieur

Quand le processus d'évocation ne se fait pas, il ne peut y avoir apprentissage ni même communication réussie. Nous allons donc tenter de préciser les conditions de mise en œuvre du processus d'évocation, en particulier en mathématiques, ainsi que les caractéristiques du langage intérieur. Plus précisément, nous explorerons les diverses modalités du processus d'évocation et les canaux de communication entre le maître et l'élève, et cela dans un double but. Le premier est de trouver des moyens de conduire un élève à faire attention et à comprendre. Le second est de trouver des voies différentes adaptées à chacun pour résoudre des problèmes.

Les habitudes évocatives

Il semble que nous ayons des habitudes évocatives. Essentiellement, nous pouvons avoir l'habitude de nous donner surtout des images visuelles, et nous dirons dans ce cas que nous avons une dominante visuelle. Nous pouvons aussi avoir des habitudes évocatives auditives, c'est-à-dire que nous nous donnons surtout des images sonores. Nous pouvons aussi nous donner des images verbales, c'est-à-dire que nous devons nous parler pour évoquer ce qui nous entoure. Nous pouvons aussi pratiquer une évocation kinesthésique, c'est-à-dire à partir des gestes ou du ressenti. Cette évocation est souvent le point de départ d'une autre évocation dans le domaine intellectuel, évocation visuelle, verbale ou auditive. Il existe bien sûr des évocations mixtes, ou adaptées à l'objet externe à évoquer. Nous donnerons des moyens de reconnaître ces divers profils dans le domaine qui nous concerne. Pour ceux que la question intéresse, ils peuvent naturellement consulter entre autres tous les ouvrages d'Antoine de La Garanderie, mais aussi ceux de Richard Bandler et John Grinder, et du Dr Raymond Lafontaine dont on trouvera les références en annexe.

La description du processus d'évocation que nous venons de faire est une description de pédagogue. Elle ne prend en compte que les éléments qui sont conscients ou qui peuvent le devenir et sur lesquels on peut intervenir comme enseignant. On peut prendre conscience facilement de la différence entre le temps d'évocation et le temps de perception : chacun de nous a déjà lu des pages entières d'un livre sans en comprendre le moindre mot. Le décodage, la perception dans ce cas, s'est bien fait, mais la traduction de ce qui est lu sous la forme d'images visuelles, de sons entendus ou d'un discours personnel n'a pas eu lieu, et il n'y a pas eu d'évocation ni, par conséquent, de compréhension.

Dire qu'il y a formation d'images visuelles ou autres au moment de l'évocation ne veut pas dire que la compréhension se réduit à la formation de telles images. Ce n'est que la partie apparente du processus. La vague n'est pas la mer, mais, pour le marin, c'est la hauteur de la vague et les courants de surface qui importent et non le taux d'oxygène près du fond. Quand nous disons de quelqu'un qu'il est visuel, cela signifie qu'il est conscient d'abord d'images visuelles. Un psychologue, lui, pourra peut-être montrer qu'il y a toujours un double codage [4], mais qu'importe ce double codage si nous ne pouvons en ramener à notre conscience qu'un seul ? Et c'est ce qui importe puisque les décisions que l'on va prendre consciemment au cours de la résolution d'un problème par exemple seront prises à partir de ce qui est présent à notre conscience à ce moment-là. Soutenir le contraire reviendrait à dire que la résolution d'un problème est un processus ne dépendant pas de la conscience, donc à jamais mystérieux.

LA PRISE DE CONSCIENCE DES HABITUDES ÉVOCATIVES

Nous allons vous proposer trois exercices vous permettant de prendre conscience de certains aspects des modalités de l'évocation. Il serait préférable de faire d'abord ces exercices en petits groupes. Ils peuvent ensuite être adaptés pour être présentés en classe. Vous pourrez ainsi prendre conscience de différences individuelles importantes et souvent insoupçonnées.

Le but de ces exercices est d'observer certaines modalités d'un processus difficile à cerner que nous appelons l'évocation. Il ne s'agit pas de faire une classification hâtive ou encore de montrer la validité d'une théorie. Il s'agit simplement de se donner les moyens d'observer en toute modestie une réalité à laquelle nous n'avons pas directement accès.

4. Paivio, Kosslyn, Ball et Reiser.

Voici un premier exercice qui permet de mettre en évidence les différences entre les habitudes évocatives. Il nous permettra en plus de proposer une définition du « geste mental ».

Il s'agit d'utiliser un vieux moyen mnémotechnique datant du Ve siècle et popularisé par Simonide. Simonide était un des convives d'un important banquet. Après l'effondrement accidentel du toit, Simonide parvint à identifier les morts parce qu'il avait associé visuellement chaque individu à sa place autour de la table. En se redonnant mentalement l'image de la table, il avait revu mentalement chacun des convives. On a tiré de là une méthode mnémotechnique pour apprendre des listes de mots. Vous pouvez vous-même en faire l'essai. On peut faire cette expérience à deux, mais il est beaucoup plus intéressant de la faire à dix par exemple.

Vous commencez par vous donner l'image d'une pièce familière de votre appartement : votre cuisine, votre chambre, votre salon... Dans cette pièce, vous identifiez mentalement dix objets : s'il s'agit de la cuisine, ce peut être le réfrigérateur, la cuisinière, l'évier, la table, etc. Toujours mentalement vous ordonnez les dix objets de la pièce : le premier pourra être le réfrigérateur, le second la cuisinière et ainsi de suite jusqu'au dixième. Vérifiez que vous pouvez, toujours mentalement, identifier le troisième, le cinquième, le premier, bref retrouver l'objet simplement à partir de son rang.

Demandez ensuite à quelqu'un, qu'on appellera le meneur de jeu, de faire une liste ordonnée de dix personnages connus. Ensuite demandez-lui de vous lire lentement cette liste une seule fois. Chaque fois que vous entendez le nom d'un personnage, vous visualisez son image et vous placez mentalement cette image dans l'objet qui a le même rang que le personnage dans la liste. Si Einstein est le premier de la liste, vous placerez l'image d'Einstein dans le premier objet de la pièce, puis le second personnage dans le second objet de la pièce, jusqu'à ce que la liste de personnages soit épuisée.

Ensuite, le meneur de jeu va vous demander de prendre un crayon et d'écrire le nom du premier personnage de la liste, du troisième, bref de redonner la liste non pas dans l'ordre mais dans un ordre qu'il aura lui-même déterminé.

Dès qu'on est plus de cinq à faire ensemble cette expérience, on constate en général qu'une ou deux personnes réussissent à restituer parfaitement la liste dans le désordre et qu'un nombre équivalent ne se souvient que d'un ou deux personnages. On peut donc en déduire tout de suite que la méthode a été efficace pour certains et inefficace pour d'autres. Mais il est beaucoup plus intéressant de demander à chacun de préciser ce qu'il a fait mentalement.

Certains sont arrivés parfaitement à se donner l'image visuelle d'une pièce de leur appartement, quelquefois globalement. Ils se voient au centre de la pièce et peuvent embrasser les dix objets d'un même regard. D'autres au contraire doivent imaginer qu'ils balayent du regard les objets les uns après les autres, et c'est d'ailleurs de cette façon qu'ils les ordonnent. D'autres ne parviennent que très difficilement à visualiser les objets dans la pièce. Les images sont instables, il leur est difficile de les ordonner et de les compter. Il n'est pas rare qu'ils ne se donnent que neuf objets et quelquefois onze.

La deuxième consigne est de placer l'image de chaque personnage dans l'image d'un objet. Peu de personnes la respectent. Certains prennent conscience de la difficulté qu'ils ont à visualiser un personnage qu'ils connaissent, et encore plus à manipuler mentalement son image. Certains visualisent le nom du personnage et non son image. D'autres, au lieu de placer l'image du personnage dans l'objet, font une association verbale entre le personnage et l'objet : il va leur paraître incongru de placer Einstein dans une poubelle ou une artiste de cinéma dans un réfrigérateur et c'est cette association qu'ils vont faire. D'autres vont construire un lien logique entre le personnage et l'objet, par exemple Einstein est un physicien qui aurait pu inventer les principes de fonctionnement du réfrigérateur. Il est possible aussi de représenter chaque personnage par un symbole, comme un musicien par un instrument ou une note de musique. Certains n'ont pas pu faire d'associations faute de temps.

En général, fort peu parviennent à respecter strictement la consigne donnée, souvent parce que la précision de cette consigne les oblige à faire un geste mental hors de leurs habitudes. S'ils ne remplacent pas ce geste mental inefficace par un autre qu'ils peuvent accomplir, comme par exemple de trouver un lien logique et verbal entre le personnage et l'objet, ils échoueront au moment de réciter la liste dans l'ordre comme dans le désordre.

En résumé, ceux qui retiennent la liste ont accompli le geste mental tel qu'il a été décrit, ou l'ont remplacé par un autre, efficace pour eux. Ceux qui n'ont pas pu retenir la liste n'ont pas pu effectuer le geste mental donné parce que c'est un geste mental inhabituel pour eux, ou parce qu'ils n'ont pas eu le temps de le faire.

Enfin, si on demande à des groupes de retenir par cœur une liste de dix noms après une seule lecture, sans leur indiquer une procédure mentale pour les retenir, la rétention va être beaucoup plus faible. Le lien entre l'exécution d'un geste mental et la réussite d'une tâche intellectuelle donnée est donc évident. Si le geste mental est accompli, il y a mémorisation. Dans le cas contraire, soit parce que le geste mental ne correspond pas à ce que l'individu peut faire, soit qu'aucune indication ne lui ait été donnée, il y a échec.

Adaptation de la méthode aux habitudes de chacun

On peut ensuite rechercher avec chacun des participants une méthode qui lui convienne : établir des liens logiques, descriptifs, incongrus entre l'objet et le personnage, ou entre le nom, son écriture et une caractéristique de l'objet. Ensuite, en laissant le temps nécessaire à l'accomplissement du geste mental adapté à chacun, on augmente considérablement l'efficacité de la méthode. Insistons sur l'importance de ce temps nécessaire à la réalisation du geste mental choisi.

Comme les moyens mentaux efficaces correspondent à des habitudes individuelles : ceux qui ne parviennent que faiblement à se donner consciemment des images visuelles vont utiliser un autre moyen. Ceux qui ont l'habitude de se donner des images visuelles précises et qui ont l'habitude de les utiliser dans leur travail intellectuel vont choisir une méthode très voisine de la méthode proposée. Il est intéressant aussi de constater que certains qui utilisent des images très globales qu'ils ne décomposent pas peuvent se donner l'image de la pièce globalement, mais vont avoir beaucoup de difficulté à retenir l'ordre des objets. La méthode va être efficace dans la mesure où l'on va travailler avec eux pour qu'ils ordonnent les objets de la pièce, quelquefois en donnant un numéro à chacun de ces objets.

Si l'on demande aux participants de préciser la nature de leurs images visuelles et du rôle qu'elles semblent jouer, on remarque que si la grande majorité a conscience d'une image visuelle, quelle que soit la méthode utilisée, son rôle et sa nature sont fort différents d'une personne à l'autre : chez certains, l'image est nette et elle revient telle quelle au moment de restituer la liste. Pour d'autres, elle semble lointaine, incertaine et ce n'est pas elle qui arrive au moment du rappel. L'image peut être fixe et difficile à transformer ou au contraire animée. Elle peut accompagner des mots, les illustrer ou se présenter avant toute verbalisation. Elle peut être utilisable directement pour ramener un souvenir ou simplement accompagner une autre expression de ce souvenir, verbale par exemple.

Si l'image est souvent présente dans le champ de la conscience, son rôle et son importance sont très variables. Dans la technique de Simonide, les images visuelles ont plusieurs statuts : il y a l'image de la pièce, donc une évocation d'objets existants. Il y a l'image des personnages. Ces personnages sont toujours beaucoup moins familiers que la pièce d'une maison dans laquelle on vit quotidiennement. Il y a enfin le déplacement mental de l'image du personnage dans l'objet : c'est une activité purement mentale qui ne reproduit aucune action réelle. On peut avoir facilement l'image mentale de la pièce et des objets qui la constituent sans avoir aucune « dominante visuelle ». Quelqu'un pourra se révéler comme ayant une dominante verbale, être capable de visualiser fort convenablement la pièce familière, être capable de représenter par des symboles visuels chacun des personnages, et créer des liens logiques et fort peu visuels entre les symboles et les représentations des personnages. Au moment du rappel, il verra l'objet et se dira la relation entre l'objet et le personnage. Il y aura bien eu images visuelles à un certain niveau, mais toute la procédure mentale sera verbale. Un tel individu, au moment de la lecture d'un texte, ne se fera aucune image visuelle et trouvera très difficile de mémoriser un schéma relativement simple.

Le rôle de l'image dans la vie mentale peut intervenir à des moments différents : on peut avoir facilement conscience d'images d'objets familiers, mais parvenir difficilement à créer des images sans lien avec une réalité concrète. On peut se donner des images du passé, mais ne pouvoir se donner des images de l'avenir. On peut aussi avoir des images en tête, mais trouver des relations ou faire des liens d'une façon purement verbale. Cela conduit à parler de « paramètre » [5].

Quand son rôle semble largement prépondérant dans la vie mentale, quelles que soient les circonstances, quand l'image est à la source de notre compréhension, nous dirons que nous avons affaire à quelqu'un de visuel. Quand c'est le langage qui semble prépondérant dans la vie mentale consciente, nous dirons que nous avons affaire à quelqu'un d'auditif ou de verbal selon qu'il donne plus d'importance aux mots qu'il entend ou à ceux qu'il se dit.

---

5. Voir *Les profils pédagogiques*, A. de La Garanderie, p. 114 et suivantes.

Dire de quelqu'un qu'il est visuel, ou verbal, ou auditif, est donc un raccourci qui nous cache une réalité autrement plus complexe. Nous utiliserons cependant cette terminologie parce que nous pourrons regrouper de cette façon des caractéristiques et des façons de faire, mais il est bien entendu qu'un mot comme visuel ne saurait décrire tout le processus évocatif d'un individu.

LE GESTE MENTAL

En commentant l'expérience précédente, nous avons parlé de « geste mental » pour qualifier le mouvement qui consiste à placer mentalement l'image d'un personnage sur l'image d'un objet. Il s'agit d'une action mentale sur des images mentales. À partir de là, nous pouvons donner une définition dynamique d'un geste mental :

Effectuer un geste mental consiste à faire subir, consciemment et dans un but précis, un certain traitement à des représentations mentales.

Voici un autre exemple qui justifie l'appellation de « geste mental ». Shepard et Metzler [6] ont proposé la tâche suivante : comparer deux objets présentés simultanément en vue de décider s'il s'agit du même objet dans une autre orientation ou bien de deux objets différents. L'angle entre les deux orientations de l'objet est compris entre 0° et 180°.

Le temps de décision est une fonction linéaire de l'amplitude de la rotation mesurée en degrés. Tout se passe comme si les sujets opéraient mentalement une rotation des objets et que cette rotation se faisait à vitesse constante, tout comme s'il s'agissait de faire tourner un objet réel. On peut même déterminer une vitesse de rotation mentale : 0,5 s

6. *Mental rotation of three dimentional objects*, Science, 1971.

pour 180° dans le cas d'objets simples et 3,5 s dans le cas d'objets compliqués. Il s'agit d'un véritable geste mental, comme si l'on agissait effectivement sur des objets réels bien que mentaux.

Précisons qu'un objet mental ne se résume pas à une image visuelle, comme dans le cas de l'expérience de Shepard et Metzler, mais peut être un objet beaucoup plus compliqué et de nature complètement différente. Nous parlons aussi d'un « certain traitement sur des représentations mentales ». Le traitement peut consister non seulement en un déplacement d'images, mais aussi en toute autre mise en relation ou même transformation d'un objet mental en un autre objet mental.

Un geste mental comporte deux facettes :

1. le résultat qu'il permet d'atteindre (mémoriser, comparer, etc.) ;
2. les modalités mentales du traitement effectué sur les représentations mentales (se donner une représentation imagée ou verbale d'un objet par exemple).

Cette mise en relation du but à atteindre et des moyens de l'atteindre est particulièrement précieuse du point de vue pédagogique. Accomplir un geste mental répond à un double projet :

1. l'un concerne l'objectif à atteindre : mémoriser, faire attention, trouver des invariants, etc. ;
2. l'autre concerne les modalités mentales d'y parvenir : par exemple s'imaginer dans l'avenir et se redire ce que l'on veut retenir, écouter en se redisant dans ses propres mots ce qui est dit, superposer mentalement deux images en observant ce qui coïncide et ce qui diffère.

Cette association entre les modalités du geste à effectuer et la tâche à accomplir est souvent réalisée dans le domaine sportif où l'on fait faire des gestes qui permettent de réaliser une tâche : par exemple, comment frapper la balle pour lui donner un certain effet. Les tâches intellectuelles, parce que internes, ne semblent pas accessibles à une expérience aussi directe.

Notons que même pour les gestes de nature physique, c'est la représentation mentale du geste à accomplir qui va précéder et diriger le geste physique. Les sportifs de haut niveau se repassent mentalement le geste physique à accomplir avant de l'effectuer. La représentation mentale du geste physique à effectuer pourra être de nature visuelle (je revois le geste), auditive (je me redis comment faire le geste) ou kinesthésique (je ressens ce que j'éprouve en faisant le geste). La description du geste mental pourra faire appel à plusieurs de ces modalités en même temps.

Quelle que soit la nature des évocations (verbale, visuelle ou kinesthésique) utilisée pour décrire le geste à faire, chaque individu va élaborer son codage mental personnel selon des modalités qui lui sont propres. Évidemment, le codage mental sera plus direct, plus rapide et plus efficace si l'enseignant utilise la modalité la plus habituelle pour l'élève.

Il n'est pas toujours possible de décrire directement les modalités du geste mental. Souvent on placera l'élève dans une situation où il devra exercer un geste mental sans que l'on puisse en décrire les modalités particulières. Par exemple, si l'on dit : « Avant de répondre aux questions du texte, lis le texte à haute voix et tente d'écouter le son de ta voix pendant la lecture », on décrit directement une certaine modalité du geste d'attention. Par contre si l'on dit : « Il y a dans ces deux schémas des éléments communs. Lesquels ? », on place l'élève dans une situation où il doit exercer un geste mental le conduisant à trouver un invariant. Les modalités mentales ne sont pas précisées.

La mise en œuvre du geste mental peut donc se faire de deux façons :

1. on peut donner la description des transformations mentales à effectuer. On peut parler de geste mental décrit explicitement;
2. on peut placer quelqu'un dans une situation où il doit exercer un geste mental. On peut parler alors de description implicite du geste mental.

Dans le premier cas, on précise le plus possible comment exercer le geste mental. Dans le deuxième cas, on donne un but à atteindre qui exige la mise en œuvre de certaines transformations mentales. Ce but doit être assez précis pour déclencher le geste mental désiré. Dans ce cas, l'élève a le choix des modalités particulières de ce geste mental.

Le geste mental peut alors demeurer inconscient pour celui qui l'exécute, et ce n'est pas très important pour celui qui réussit bien. En revanche, pour aider un élève en difficulté, il faut ensuite essayer de faire préciser les modalités du geste effectué pour pouvoir l'améliorer. Un geste mental donné implicitement doit donc tendre à devenir le plus explicite possible.

L'idée de geste mental permet de donner à l'élève une bonne part de la maîtrise des moyens de son apprentissage. En effet, apprendre devient un processus individuel mais dont on peut parler, dont on peut décrire certains aspects et dont chacun peut améliorer certaines modalités à partir de ce qu'il fait déjà, ou à partir de ce que d'autres font. Chaque élève peut prendre conscience qu'il est acteur et responsable de son apprentissage. C'est une découverte importante pour les enfants en difficulté qui pensent souvent que tout se produit en dehors d'eux et que les moyens mentaux qu'ils utilisent sont, *a priori*, mauvais.

Faisons le point

Cet exemple permet de préciser déjà un certain nombre de concepts que nous allons utiliser par la suite.
– La réussite d'une tâche intellectuelle dépend de l'accomplissement de gestes mentaux.
– Les modalités de ces gestes mentaux sont différentes d'un individu à l'autre.
– Tenter d'accomplir des gestes mentaux qui sont contraires aux habitudes d'un individu conduisent à un échec plus ou moins important.
– Adapter les gestes mentaux qu'effectue un individu à ses habitudes mentales augmente sa performance.
– Certains individus ont des habitudes de visualisation consciente très supérieures à leurs habitudes de verbalisation.
– Certains individus ont des habitudes de verbalisation consciente très supérieures à leurs habitudes de visualisation.

Faire de la gestion mentale, ce n'est pas imposer une consigne précise portant sur les modalités d'un geste mental, c'est au contraire adapter la consigne aux habitudes de ceux qui devront l'appliquer et faire évoluer leurs habitudes mentales. C'est donner à chacun les moyens et le temps de trouver les modalités d'évocation qui vont lui permettre de progresser.

Faire de la gestion mentale, ce n'est pas non plus travailler au niveau de l'impression ou des canaux sensoriels, mais au niveau conscient. En cela, c'est un travail pédagogique et non pas psychologique.

Du point de vue pédagogique, c'est sur le processus d'évocation qu'il nous faut agir alors que nous sommes portés à prendre surtout en compte la perception : nous veillons à la présentation des cours, à leur organisation didactique, ce qui est essentiel. Mais il nous faut aussi prendre en compte le processus d'évocation pour rejoindre l'élève où il est et comme il est, avant éventuellement de lui apprendre à évoluer.

COMMENT DÉTERMINER LES HABITUDES ÉVOCATIVES ?

Voici maintenant deux exercices que vous pourrez faire d'abord avec un petit groupe, puis que vous pourrez adapter à une classe. Le premier exercice permettra de préciser le processus évocatif d'un texte entendu, l'autre d'un schéma placé sur une grille.

Le principe du premier exercice est simple : les habitudes évocatives agissent comme un filtre qui conserve certains éléments d'information et en laisse échapper d'autres. En observant ce qui est conservé et ce qui est abandonné, on peut faire une hypothèse sur la nature du filtre constitué par nos habitudes mentales. Dans la mesure où le même filtre va agir pendant un cours de mathématiques, nous aurons un certain nombre d'indications quant à la façon de présenter ce cours, donner une explication ou guider un élève. Il faudra encore être prudent : des filtres différents peuvent entraîner les mêmes conséquences. Il faudra donc apprendre à poser des questions qui vont nous éclairer et nous amener à confirmer ou infirmer les hypothèses que nous pouvons faire quant aux habitudes évocatives. Nous donnerons des exemples d'entrevues et des questions que nous avons posées à des enfants de moins de douze ans, des adolescents et de jeunes adultes. La plupart de ces jeunes gens avaient certaines difficultés scolaires, en particulier en mathématiques.

Ces entrevues se font autour de tâches précises. Nous présentons ces exercices de façon à ce qu'il soit possible de reproduire les mêmes expériences et de faire des analyses semblables [7]. La conduite du dialogue doit se faire en respectant un certain nombre de conditions :

---

7. Des bandes vidéo sont disponibles à l'Université du Québec à Montréal, département de Mathématiques et d'Informatique, Montréal.

– Le dialogue s'instaure à l'occasion d'une tâche à accomplir, ou qui vient d'être accomplie.

– Ceux qui participent à l'entrevue doivent en connaître clairement le but : il ne s'agit pas d'un test, mais d'une tentative de comprendre ensemble les moyens utilisés pour retenir, faire ou comprendre. Il s'agit d'une investigation à deux. La réussite de l'exercice n'a pas d'importance, mais c'est ce qu'on s'est dit, ce qu'on a imaginé, les images, les mots dont on a eu conscience qui nous intéressent.

– Dans la mesure où celui qui est interviewé participe à part égale à la recherche de ses moyens d'apprendre, il doit être aussi actif que celui qui mène l'entrevue. Si l'interviewer ressent le contraire, c'est qu'il est sorti de son rôle et qu'il a perdu la confiance de celui qu'il interviewe.

– Il doit être possible à l'interviewé de mettre un terme à tout moment à l'entrevue.

– Les questions ou les remarques faites ne doivent comporter aucun jugement sur la qualité de ce qui est fait.

– Même si une réponse peut paraître incohérente, elle est toujours fondée pour celui qui la donne. Il ne s'agit donc pas de faire trouver la bonne réponse mais de trouver ce qui fonde la réponse erronée.

– Toute affirmation de la part de celui qui mène l'entrevue doit être formulée à la façon d'une hypothèse, le plus souvent sous forme d'alternative, demandant confirmation ou choix de la part de celui qui est interviewé.

– Les questions visent à faire préciser des façons de faire et des représentations mentales. Celui qui conduit l'entrevue doit faire sans cesse des hypothèses sur ce qui soustend une façon de faire, une affirmation, une réponse, et vérifier systématiquement ces hypothèses en les exprimant ou en les vérifiant indirectement. Il doit le faire en toute modestie, sans jugement implicite, en montrant bien qu'il est prêt à retirer cette hypothèse si elle n'est pas acceptable.

– Nous considérons qu'une hypothèse est vérifiée si les deux conditions suivantes sont l'une et l'autre vérifiées.
1. L'hypothèse est confirmée directement par l'interviewé.
2. On propose une tâche qui dépend directement de l'hypothèse et cette tâche est réussie.

En quelques mots simples, on doit faire part des éléments précédents au début de l'entrevue.

MÉMORISATION ET COMPRÉHENSION D'UN TEXTE ENTENDU

Nous avons construit des textes [8] qui comportent des descriptions de lieux, des séquences d'actions, l'expression de sentiments, d'opinions, et des explications plus théoriques. Nous avons lu ce texte individuellement en demandant à chacun de nous redonner ce qu'il en avait retenu. Bien sûr, personne ne peut retenir tout le texte, mais les choix implicites faits par chacun dans ce qu'il en redonne permettent de faire des hypothèses sur les modalités de l'évocation.

Voici deux textes : le premier a été composé à partir d'un livre de Marguerite Yourcenar, *L'œuvre au noir*. Il a été séparé en 11 petits paragraphes et il est destiné plus particulièrement à des élèves de plus de quinze ans. Le second, plus simple, a été écrit pour des élèves plus jeunes. Vous pouvez à votre tour composer des textes analogues et que vous jugerez mieux adaptés à votre auditoire.

8. Ce sont ces textes que nous avons utilisés avec les élèves.

Texte 1

1. *Zénon arriva à la porte des Dames au moment où on levait la herse et où on abaissait le pont-levis.*
2. *Les gardes le saluèrent poliment. Il quitta la ville et tourna à gauche.*
3. *Il marchait à grands pas rapides le long d'un canal ;*
4. *c'était l'heure où les maraîchers entraient en ville pour vendre leurs légumes.*
5. *On avait devant soi une de ces belles matinées où le soleil perce peu à peu les brumes.*
6. *Un bien-être qui était presque une joie emplissait le marcheur.*
Tout cela semblait suffisant pour jeter derrière soi les soucis qui avaient agité les cinq dernières semaines. L'air libre dissipait le délire.
7. *Il secoua la tête comme on le fait pour écarter une abeille importune car il revivait maintenant trop souvent des moments révolus de son propre passé, non par regret ou par nostalgie, mais parce que les cloisons du temps semblaient avoir éclaté.*
8. *Évitant un bourg qui lui faisait l'effet d'un ulcère sur la belle peau du sable, il prit par les dunes.*
9. *Du haut de l'éminence la plus proche, il se retourna pour regarder la mer à 300 mètres de là.*
10. *Il vit* La Belle Colombelle *déployer sa voile.*
11. *Le temps eût été beau pour le voyage.*

Les numéros ne sont pas lus. Ils ne nous servent qu'à identifier la nature des diverses parties du texte :
1. description de lieu ; indication de temps ;
2. actions décrites ;
3. actions décrites ;
4. indication de temps – actions ;
5. description, atmosphère, impressions ;
6. impressions ressenties, notions plus abstraites ;
7. enchaînement logique ; relations de cause à effet ;

8. action, image ;
9. description et action ;
10. description ;
11. impression ressentie.

Le vocabulaire n'est pas élémentaire, certains mots risquent de ne pas être connus (herse,...) et certaines tournures de phrases peuvent causer des problèmes. La façon dont est traité ce qui n'est pas compris nous donne aussi des renseignements sur certains aspects du fonctionnement mental de chacun.

Texte 2

1. *François habite une grande maison aux pierres apparentes, à deux étages avec un garage sur le côté. Sur le devant, au centre de la pelouse, le massif de tulipes n'est pas encore fleuri.*
2. *Ce matin-là, François sort en courant au moment où un camelot apporte le journal. Il le croise sans même le voir, traverse la rue et tourne à gauche.*
3. *La matinée était douce. Un peu de brume flottait encore dans le ciel. Le silence de la rue était rassurant. On avait envie de s'imprégner de la légèreté de l'air pour y puiser une certaine sérénité.*
4. *François éprouvait presque de la joie après la semaine difficile qu'il venait de vivre. Soudain l'impression de liberté éloignait un passé difficile.*
5. *Il ne courait pas parce qu'il était pressé, mais parce qu'il lui fallait exprimer la joie qu'il ressentait en ce début de vacances. Les vacances, c'était une rupture dans le temps, une ouverture, un ailleurs à conquérir.*

Chaque numéro correspond à la classification suivante :
1. description de lieu ;
2. actions décrites ; indication de temps ; direction ;
3. atmosphère, impression, ressenti ;

4. ressenti, notion abstraite;
5. enchaînement logique; explications abstraites.

Modalités de passage de l'entrevue

Première lecture: On commence par avertir l'auditeur qu'il devra dire tout ce qu'il a «gardé» ou «retenu» du texte. L'expression «gardé» est suffisamment vague pour que quelqu'un «en garde « tous les détails physiques, alors qu'un autre «en gardera» chacun des mots ou simplement une impression de liberté. Pour d'autres, «garder» voudra dire retenir l'organisation logique ou chronologique du texte. L'interprétation du terme «gardé» livre déjà une indication sur le projet implicite que chacun se fait pour donner un sens à un texte.

Le texte sera lu trois fois. La première fois sera lente mais sans arrêt.

La deuxième lecture se fera en s'arrêtant à chaque phrase numérotée. On indique à l'auditeur qu'il devra, pendant chaque arrêt, tenter de se faire des images visuelles de ce qu'il entend, c'est-à-dire construire le film ou la diapositive correspondant à ce qu'il vient d'entendre. Le lecteur poursuit la lecture dès qu'il voit que l'auditeur a terminé le travail mental de représentation. On tente donc de provoquer une évocation visuelle.

Avant de commencer *la troisième lecture*, on indique à l'auditeur qu'il devra se redire ce qu'il vient d'entendre. Il peut faire cette réitération soit en transformant les mots du texte, soit en répétant exactement le texte, soit en se redonnant l'image auditive de ce qu'il vient d'entendre, selon son choix. La lecture se fera avec les mêmes pauses qu'à la deuxième lecture. On tente cette fois de provoquer une évocation verbale ou auditive.

On peut proposer une quatrième lecture: cette fois, l'auditeur se laissera aller à associer des images, des sentiments au texte qui lui est lu.

Au lieu de relire trois fois le même texte, on ne peut en relire que certaines parties pour vérifier certaines hypothèses que l'on peut avoir faites après la première lecture.

Élaboration des hypothèses après l'écoute d'un texte

Le tri inconscient effectué par l'auditeur après la première lecture permet de faire certaines hypothèses sur les modalités de l'évocation.

Groupe 1. – Ils retiennent les descriptions de lieux et oublient tout ce qui est expression de sentiments ou d'impressions. Même si on leur pose des questions sur ces parties du texte, ils ne peuvent à peu près rien en redonner. Ils disent la plupart du temps avoir des images visuelles nettes et parfois immobiles. Leur compréhension part de ces images. Quand ils lisent à voix haute, la compréhension peut être bloquée.

a) Dans cette catégorie, certains vont employer un vocabulaire très proche du vocabulaire du texte : à partir des images qu'ils se sont données au moment de la lecture et qu'ils se redonnent avant de retrouver les mots. Ils pourront apprendre « par cœur » à condition de se redonner des images visuelles avant de retrouver les mots. L'évocation de l'image leur ouvre le chemin des mots.

b) D'autres vont employer un vocabulaire très personnel. Ils décrivent les images constituées au moment de la lecture. Ils utilisent alors un vocabulaire qui leur est propre parce qu'ils racontent ce qu'ils voient mentalement, sans que l'image ne leur ramène les mots du texte. Ils doivent alors décrire l'image évoquée. Ils ont beaucoup de mal à apprendre par cœur, sauf s'ils peuvent mémoriser directement les images des mots ou des phrases.

Ils seront sensibles aux descriptions et aux actions qu'ils se représentent avec assez de précision. S'ils ont l'habitude de se donner l'image du graphisme des mots, le sens leur échappe souvent et ils ont une très bonne orthographe d'usage. Ils vont avoir tendance à simplifier, à résumer par des images simples à partir desquelles ils vont lui donner son sens. Ces images ne respectent pas toujours la chronologie. Les images peuvent revenir dans le désordre, sans liens entre elles. Ils veulent se donner une vision globale.

Pour donner du sens, ils font quelquefois appel à des images familières tirées de leur expérience. Ils font alors des analogies sans substituer complètement leur expérience personnelle au texte comme peuvent le faire ceux que nous qualifierons de « kinesthésiques ». Ils parlent souvent vite et par à-coups.

On peut faire l'hypothèse d'une dominante visuelle, mais il faut rester prudent. Un élève verbal peut, dès la première lecture, se faire des images relativement précises concernant une description, à la suite des mots entendus, mais alors il va employer le vocabulaire entendu, et non pas le sien. Dans la partie traitant de l'atmosphère générale et des sentiments éprouvés, il va utiliser aussi une partie du vocabulaire du texte. Les deux lectures suivantes vont permettre de préciser le processus d'évocation, ainsi que l'exercice portant sur la reproduction d'un schéma.

Groupe 2. – Ils répètent de grandes parties de ce qu'ils ont entendu presque mot à mot, même si le sens leur échappe. S'ils ont des images visuelles, elles manquent de netteté; elles sont souvent lointaines. Elles apparaissent au moment de l'écoute, mais sont toujours en arrière-plan au moment du rappel. Par contre, les mots entendus reviennent facilement. Ils mentionnent, eux-mêmes ou après qu'on leur a posé la question, les sentiments éprouvés par les protagonistes et l'atmosphère générale.

S'ils disent se faire des images visuelles nettes, c'est le résultat d'un effort très conscient et souvent assez lent. Ce qu'ils entendent est très important. Ils réentendent la voix du lecteur, ou leur propre voix. À l'écoute, ils vont quelquefois entendre des bruits de la rue, des cris, des chants d'oiseaux par exemple.

On peut faire l'hypothèse d'une dominante auditive.

Groupe 3. – Ils sont souvent difficiles à distinguer des auditifs. La différence provient surtout de ce qu'ils doivent se dire plutôt que de se redonner les sons entendus. Au moment de l'écoute, ils entendent en écho leur voix répéter le texte. Au moment du rappel, c'est leur voix qu'ils entendent. Ils utilisent d'autres mots que ceux employés dans le texte initial. Ils mentionnent, contrairement au groupe 1, les sentiments éprouvés et l'ambiance exprimée. Ils traduisent ce qu'ils entendent dans un vocabulaire qui leur est propre au moment de l'écoute, pour prendre conscience du sens. Cette traduction est quelquefois indispensable pour donner du sens. Ils redonnent les mots qu'ils se sont dits au moment de l'évocation, ou des commentaires qu'ils se sont faits à ce moment-là.

Quand ils lisent, ils ont souvent besoin de s'arrêter et de reformuler ce qui vient d'être lu, et c'est à ce moment-là que la compréhension se fait. Dans le prolongement des mots, des images peuvent se former et une part de la compréhension peut provenir de cette traduction mot-image, mais les mots viennent toujours d'abord.

On peut faire l'hypothèse d'une dominante verbale.

Les groupes 3 et 4 sont particulièrement sensibles à l'articulation logique et chronologique. Ils veulent souvent connaître les causes des événements ou des comportements des individus mis en scène : d'où vient Zénon, pourquoi est-il là, que s'est-il passé ?

Quand ils ont conscience d'images visuelles, ces images sont souvent floues, lointaines et constituent un fond, un décor. Ces images illustrent les mots et les phrases. Elles surviennent après les mots. Les images visuelles sont enchaînées, rarement fixes.

Ils peuvent être très sensibles à la sonorité des mots :

pour eux, la sonorité du mot « sérénité » exprime déjà le calme et la paix.

Ils vont employer des mots précis pour parler de ce qu'ils ressentent. Ils sont facilement portés à l'introspection. Ils parlent souvent plus lentement.

Groupe 4. – Ils parlent surtout de ce qu'ils ont éprouvé au moment de l'écoute. Ils substituent leur expérience personnelle à ce qui est écrit. Ils peuvent alors broder à partir de quelques mots, insister sur les sentiments et négliger complètement les détails, les lieux, tout ce qui est concret. Un mot comme « immense » peut entraîner l'image d'un désert, ou le mot « foule », et provoquer une impression de solitude, d'écrasement. C'est ce sentiment éprouvé qui va donner le sens. L'évocation se fait à partir de ce qu'ils ont vécu ou ressenti. Ils trouvent difficile de se soumettre à une loi venue de l'extérieur, à une règle imposée. Après la troisième lecture, ils vont éprouver des sentiments et des sensations beaucoup plus précises qu'à la première lecture. Il se peut qu'ils parlent très lentement

On peut faire l'hypothèse d'une évocation de type kinesthésique.

Les groupes 2, 3 et 4 vont être particulièrement sensibles au son de la voix, au rythme de la phrase, en particulier les groupes 2 et 4.

Quel que soit le groupe, certains vont s'identifier aux personnages, participer à l'action. D'autres au contraire vont se faire seulement spectateurs. L'action ou le spectacle se fait en dehors d'eux. Nous dirons que les premiers sont « en première personne » et les seconds en « troisième personne ».

À l'occasion des deux lectures suivantes, on tentera de confirmer ou d'infirmer les hypothèses posées à la première lecture. Quand on demande de faire des images visuelles à la lecture, si aucun gain n'est réalisé, on demandera si les images ont été inutiles parce qu'ils s'en sont déjà fait à la première lecture ou, au contraire, parce qu'ils ne parviennent pas à s'en faire. Dans le premier cas, si nous avions fait l'hypothèse qu'ils évoquaient plutôt visuellement, cette hypothèse se trouve confirmée. S'ils se trouvent dans le deuxième cas et que nous avions fait l'hypothèse qu'ils étaient plutôt verbaux ou auditifs, l'hypothèse se trouve aussi confirmée. Dans les deux cas, nous poursuivrons le dialogue pour préciser la nature et la qualité de ces images, le lien entre les images et les mots, les conditions dans lesquelles elles apparaissent.

Si beaucoup plus d'informations sont conservées dans la deuxième lecture que dans la première, et si elles concernent des aspects visuels du texte, on peut faire l'hypothèse que l'individu peut pratiquer une évocation visuelle mais qu'il ne l'a pas fait à l'écoute, soit parce qu'il ne le fait pas habituellement pour ce qu'il entend, ou qu'il ne l'a pas fait simplement dans ce cas-là, ou encore qu'il faille lui dire de le faire pour qu'il le fasse. C'est une information importante pour l'aider à retenir et comprendre.

La troisième lecture va de la même façon confirmer ou infirmer des hypothèses faites précédemment : si aucun progrès n'est fait par rapport aux lectures précédentes, l'inutilité de cette lecture peut provenir d'une évocation déjà auditive ou verbale dès la première lecture ; dans ce cas, les notations concernant certains sentiments, l'atmosphère de la rue devaient déjà être présentes à la première lecture. Si au contraire l'évocation verbale est inefficace, sans doute l'évocation visuelle l'était davantage. On peut demander à l'interviewé si ce type d'évocation est facile et lui apporte quelque chose.

LE PROJET

Les quatre catégories précédentes, recoupées par les catégories « première personne » et « troisième personne », correspondent souvent à de véritables habitudes, mais elles ne suffisent pas à décrire avec assez de précision la suite des gestes mentaux conduisant à la prise de conscience du sens. Nous parlerons de « chaîne évocative » pour exprimer que l'évocation n'est pas faite par un geste mental unique. Par exemple, à l'écoute, on va se former des images visuelles globales d'un paysage et l'associer à un paysage connu et c'est de cette association que va jaillir le sens.

On va constater que cette chaîne évocative constitue une véritable habitude que l'on retrouve chaque fois que l'on aborde un texte nouveau. Tout se passe donc comme si l'on avait le projet d'effectuer cette chaîne évocative pour s'approprier le sens. Nous dirons que ce projet est implicite parce que nous n'en n'avons pas forcément conscience. Avec un peu d'habitude, on peut amener quelqu'un à prendre conscience de l'enchaînement des gestes mentaux qui constitue la chaîne évocative. Dans les exemples qui vont suivre, « je » représente chaque fois un personnage différent.

Projets de nature visuelle

– Je lis un texte. En le lisant, je vois des images défiler devant moi, les personnages s'animer dans un décor que je peux voir. Je suis spectateur. Je comprends parce que, en lisant, j'associe ce texte à des images qui ont déjà un sens pour moi. Au moment du rappel, ce sont les images qui reviennent et qui sont porteuses de sens.

– C'est le graphisme des mots qui me revient. J'ai une bonne orthographe d'usage, mais le sens de ce que je lis m'échappe souvent. Je dois donc me donner l'image graphique des mots, puis associer ce graphisme à une image exprimant le sens du mot.

– Ce sont encore des images qui me reviennent, mais les images sont presque fixes. Ce sont des « flashes » qui ne respectent pas nécessairement la chronologie et je vais sans doute avoir beaucoup de difficulté à faire des liens entre les diverses parties. Je dois donc me donner ces images fixes puis me donner des repères pour ordonner ces images.

Projets de nature auditive ou verbale

– Je lis et j'entends une voix, la mienne ou celle d'un lecteur imaginaire. Cette lecture ne suscite pas d'images visuelles, mais les mots entendus me donnent l'impression de pénétrer le sens. Ces mots déclenchent des associations verbales qui sont chargées de sens pour moi.

– Je lis le texte, j'ai vu certaines scènes et j'ai écouté ma voix intérieure. J'ai eu l'impression de comprendre le sens, mais soudain j'ai besoin d'arrêter pour me raconter tout ce que je viens de lire. Mes yeux quittent la page et je reconstruis le texte que je viens de lire, je l'associe à d'autres textes ou à d'autres expériences que j'ai vécues. C'est pendant cette reconstruction personnelle que j'ai l'impression de comprendre ce que je lis.

– Pendant la lecture, je me fais un commentaire. Ce commentaire peut porter sur les raisons du comportement d'un individu. C'est ce commentaire qui va me revenir et les faits concrets vont m'échapper.

– Pour avoir l'impression de comprendre, j'ai besoin de replacer tout élément nouveau dans une structure plus vaste. Je suis toujours en train de tenter de faire ces liens. Ce qui va me rester est le résultat de cette tentative.

– Je n'évoque que de l'enchaînement logique des idées et des événements exprimés. Il ne me revient pas d'images, simplement les mots exprimant la structure du texte.

– Je lis et je me redis. Dans le prolongement des mots, je vois des images se former. C'est au moment de cette traduction des mots en images que le sens du texte m'apparaît.

– Je lis et j'entends les mots du texte mais, en arrière-plan, j'ai des impressions visuelles peu nettes. Il n'y a pas à proprement parler traduction des mots en images, mais simplement accompagnement lointain. Si j'essaye de supprimer cet accompagnement visuel, je me rends compte que le sens m'échappe.

Projet mixte

– Selon ce qui est exprimé dans le texte, la nature des images évoquées est différente. Lorsqu'il s'agit de faits concrets, ce sont des images visuelles qui m'apparaissent, mais dès qu'il s'agit de sentiments, j'évoque des circonstances où j'ai moi-même éprouvé des sentiments analogues. Je vais avoir un souvenir très objectif des faits et des lieux mais un souvenir très subjectif des sentiments ou même des opinions exprimées.

Projets kinesthésiques

– Pour comprendre, je dois faire un lien entre ce que je lis et les événements de ma propre vie. Si je ne peux faire ce lien, le texte ne m'intéresse pas. J'ai l'habitude de faire ce lien verbalement et c'est ce qui va me rester du texte.

– Je lis et me laisse aller à associer des impressions ou des images. En lisant « immense » je vois une foule, un désert, une pyramide, ou je ressens une impression de petitesse, de solitude, d'écrasement.

S'il y a un lien entre l'évocation faite au moment de l'écoute ou de la lecture et l'évocation faite au moment du rappel, les images, les mots, les impressions qui me reviennent ne sont pas forcément les images, les mots et les impressions évoqués au moment de l'évocation. Une certaine transformation plus ou moins grande s'est effectuée.

Une différence importante entre les images évoquées et les images qui apparaissent au moment du rappel est souvent le signe d'une évocation peu naturelle. Si une évocation visuelle correspond à un rappel verbal, c'est que le travail évocatif s'est poursuivi à la recherche du sens. Dans tous les cas, on peut être sûr que si le travail mental d'évocation a été pauvre, l'évocation au moment du rappel le sera aussi.

Les moments de rupture dans l'attention

La même activité permet de s'intéresser aussi aux « ruptures d'évocation », c'est à dire aux moments où le type d'évocation pratiquée ne permet plus de donner accès au sens. C'est le cas par exemple d'une évocation de type visuel s'exerçant sans succès sur une partie du texte exprimant un sentiment. Certains vont alors partir dans une rêverie qui va les éloigner complètement de tout effort d'attention et ils ne s'intéresseront plus à la suite du texte. D'autres vont ressentir une impression de panique qui va bloquer toute évocation ultérieure. On peut de cette façon commencer une analyse de ces moments où l'on se trouve devant une absence d'évocation, ce qu'on appelle communément « un trou noir ». Les sentiments qui accompagnent ces trous noirs, découragement, indifférence, angoisse, se retrouvent souvent à l'origine d'une difficulté scolaire.

Un individu qui aura l'habitude de se donner des images fixes, nettes et colorées aura tendance à y avoir recours même si le sujet qu'il doit traiter s'y prête mal. Un autre, incapable de se donner consciemment une image visuelle nette, prendra l'habitude d'évoquer autrement. S'il se parle facilement, il se racontera ce qu'il voit et ce sera son moyen d'évocation favori.

Nous nous plaçons là au niveau de ce qui est ou peut devenir conscient. Celai ne veut pas dire que celui qui a pris l'habitude de se donner des images visuelles nettes ne se donne pas quelque part une description verbale. Même si ce double codage existe dans la plupart des cas, rappelons que c'est ce qui est conscient pour l'individu qui va largement orienter son activité. Entre celui qui aura en tête l'image visuelle d'un événement et un autre qui aura conscience surtout de la description verbale du même événement, la différence d'interprétation risque d'être grande. À la lecture du texte précédent, le premier aura tendance à parler des éléments extérieurs, du château, des faits, alors que le second va surtout retenir l'enchaînement chronologique et les sentiments éprouvés par le personnage principal. Si un élève n'a rien, ni images, ni mots remontant à sa conscience, il ne pourra rien dire du texte. Si on se place du point de vue pédagogique, c'est ce qui est conscient qui dirige surtout notre compréhension, notre attention et notre mémoire. C'est aussi à partir des éléments qui peuvent devenir conscients qu'un élève pourra évoluer et s'améliorer.

MÉMORISATION D'UN SCHÉMA

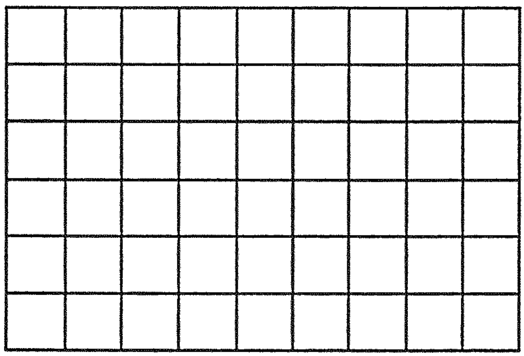
Une grande partie de l'information passe par l'image. La géométrie part de l'image. On verra que le calcul algébrique et les exercices de logique s'appuient souvent sur la manipulation mentale d'images. D'autre part, on entend souvent dire « qu'une image vaut mille mots », ce qui est bien souvent une grande exagération. L'image ne joue pas le même rôle que les mots qu'on peut lui associer. Elle n'est pas traitée de la même façon.

Les activités suivantes vont vous permettre de prendre conscience de ces différences profondes et de constater la difficulté qu'il peut y avoir pour certains à décomposer et à mémoriser un schéma apparemment très simple. Qu'on imagine alors les problèmes d'un élève de ce type face à un enseignement fondé sur l'image.

Modalités de l'exercice

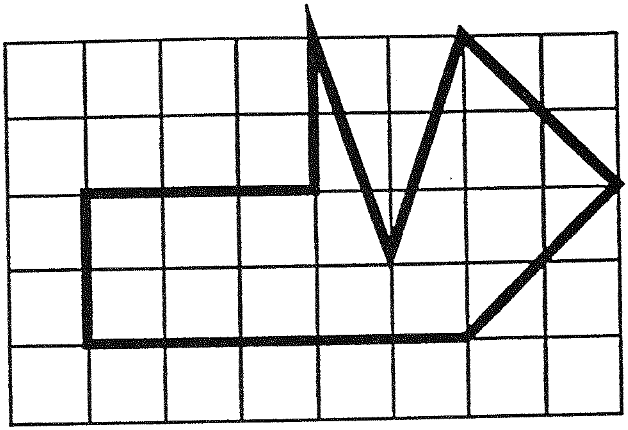
Le but de l'exercice est de reproduire de mémoire sur un quadrillage un dessin fait de segments.

Chaque élève a à sa disposition au moins trois quadrillages comme celui-ci :



Le dessin à reproduire sera présenté sur un rétroprojecteur. On doit le laisser à la vue des participants au moins trente secondes si l'on s'adresse à un groupe. Si l'on réalise une entrevue individuelle, le dessin peut être observé aussi longtemps que désiré. Dans ce cas, on prendra en note le temps d'observation.

Le quadrillage mis à la disposition des élèves est un peu plus grand que celui sur lequel le dessin est fait. Cela nous donnera quelques renseignements précieux sur le travail mental effectué pour le mémoriser. Ceux qui se donnent une représentation globale de la figure en ne prenant que quelques points de repères par rapport aux bords du quadrillage se trouvent très gênés au moment de la reproduction de la figure, alors que ceux qui se donnent une représentation intrinsèque de la figure ne le sont pas.



L'observation terminée, chaque élève tente de reproduire le dessin sur son quadrillage. Le dessin terminé, chacun cache la reproduction qu'il vient de faire et on montre de nouveau le modèle. On cache de nouveau le modèle et l'élève fait une nouvelle reproduction. On procède trois fois de cette façon.

À la fin, l'élève compare ses trois reproductions et le modèle.

Élaboration d'hypothèses quant à l'évocation d'une image

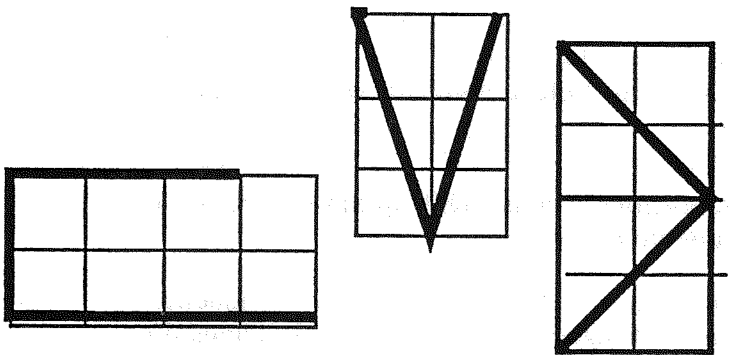
Dans le cas d'une observation individuelle, nous avons déjà deux indices. Le premier est le temps d'observation. Un temps d'observation très court (moins de 15 secondes) est le signe d'une tentative d'évocation surtout visuelle. Cette évocation peut échouer et ne déboucher que sur une très mauvaise reproduction. Un temps d'évocation dépassant 30 secondes est souvent le signe d'une évocation verbale.

Un autre indice est la façon de faire le dessin : les mouvements du crayon, des lèvres, l'utilisation des carreaux, le repérage par rapport aux bords ou par rapport au dessin lui-même.

L'exercice proposé est très différent de la reproduction d'un objet réel ou même de la reproduction d'un dessin qui ne serait pas assujetti à une grille. Nous verrons que le dessin artistique conduit à un type d'évocation très particulier et très différent.

Groupe 1. – Une évocation visuelle du dessin peut consister simplement à vouloir conserver très rapidement et globalement toute la figure, ce qui conduit souvent à l'échec, mais correspond bien à cette tentative constante chez les plus visuels de se placer en dehors du temps.

Une évocation visuelle plus précise consiste à décomposer le dessin en grands blocs : une sorte de rectangle, un grand V, un triangle. Chaque partie sera évoquée globalement, comme par exemple :



Chaque morceau est évoqué séparément, ce qui souvent cause des problèmes de coordination au moment de replacer les divers éléments ensemble. Aucun morceau n'est placé avant un autre, seul compte l'organisation spatiale des uns par rapport aux autres.

Cette évocation peut être suivie par un codage numérique : il y a 5 de large, 3 de haut, etc. Ce codage vient après la vision globale, et la décomposition en plusieurs parties.

Le codage numérique peut être organisé en recherchant un *pattern :* il n'y a que les nombres 2 et 3 qui interviennent : 2, 3, 2, 3, 3, 2, 2, 2 + 3. Ces nombres sont associés à l'image visuelle nette et d'abord présente.

La différence entre les dimensions de la grille initiale et la grille sur laquelle on reproduit le dessin est souvent vue immédiatement. Quand elle ne l'est pas, celui qui a évoqué globalement le schéma a pris des repères par rapport aux bords de la grille initiale et va avoir beaucoup de difficulté à faire une reproduction exacte.

Certains commencent par enlever les carreaux supplémentaires en les barrant avant de commencer la reproduction. Ils retrouvent ainsi la taille de la grille initiale. Cela suggère une évocation globale.

L'évocation est avant tout spatiale, et peu séquentielle.

Groupes 2 et 3. – Une évocation verbale du dessin consiste à se donner la description du schéma : je pars du sommet du dernier carreau en bas à gauche. Je monte de 2 carreaux, je tourne à gauche et j'avance de 3 carreaux, puis je monte de 2 carreaux. Ensuite, on utilisera un mot comme diagonale par exemple : je descends en diagonale de 3 carreaux et de 1 carreau horizontalement. La connaissance d'un vocabulaire géométrique les aide grandement à mémoriser le schéma.

Cette description peut se faire tout en ayant une impression générale visuelle du dessin ou encore analogique : il ressemble à une tortue, à un personnage couché.

Au lieu d'être exprimée à la première personne, et sous forme d'action, la description du dessin peut se faire de façon très extérieure : il y a deux carrés verticalement, trois horizontalement, puis deux verticalement. Dans tous les cas, il y a un ordre. On part d'un point donné, et on y revient. La construction du dessin est perçue comme une séquence. C'est une description qui permet de construire le dessin, même si, en se parlant et en le dessinant, l'image de la figure se reforme mentalement un peu avant qu'elle n'apparaisse sur le papier.

Une autre façon de reproduire verbalement ce dessin peut se faire en comptant les carreaux à l'intérieur du dessin lui-même au lieu de compter le pourtour. Dans tous les cas, on ne se souvient que de ce qu'on s'est dit au moment de l'observation.

Il se peut qu'il y ait une certaine panique au moment de la présentation de l'exercice, ce qui correspond à une crainte habituelle devant tout ce qui est exercice portant sur un domaine visuel.

Souvent les élèves de ce groupe ne sont pas aussi organisés dans leur gestion mentale : ils vont tenter de nommer des parties du dessin : « Il y a des pointes, une grosse, une petite, ça monte, ça descend en diagonale. » Ils peuvent aussi donner des noms d'objets concrets aux diverses parties du dessin : une voile, un bec, une tente. Ce sont des gens qui évoquent surtout ce qui est concret[9]. Certains veulent trouver un moyen logique qui leur permettrait de « déduire » une construction de la figure. On retrouve là le désir de cohérence.

Groupe 4. – Si l'on a affaire à un individu plus kinesthésique, il imaginera, en regardant le dessin, qu'il le trace. C'est en faisant ce travail mental qu'il va s'en donner la description qui lui permettra de le reproduire. Il « vivra » beaucoup plus le schéma. Il ne parlera pas de « pointe », mais de « piquant » par exemple. Quelquefois, il lui sera impossible de s'imaginer faire le dessin sans le faire effectivement. Il faudra alors le reproduire en ayant le dessin sous les yeux, ce qui permettra à l'évocation verbale soutenue par une évocation ressentie musculairement de se faire et de permettre la reproduction ultérieure.

---

9. Voir les paramètres dans *Les profils pédagogiques,* déjà cités, p. 114.

Une évocation auditive ou verbale part des éléments pour reconstituer l'ensemble. Elle demande du temps. Une évocation visuelle part de l'ensemble et brise l'image globale trop compliquée en parcelles d'images plus simples mais qui, chacune, peuvent être globalement évoquées. Elle est plus rapide. Alors que les premiers font une évocation ordonnée dans le temps, les seconds font une évocation située dans l'espace et non étalée dans le temps. Au lieu d'évocation auditive et verbale, on pourrait parler d'évocation se situant dans le temps, et au lieu d'évocation visuelle on pourrait parler d'évocation située dans l'espace, en dehors de toute considération temporelle. Plus que l'image ou les mots, cette façon de se placer naturellement dans le déroulement temporel ou au contraire de l'ignorer pour se situer surtout dans l'espace conduit à des différences de la plus grande importance quand aux modalités de l'apprentissage et à la nature de la compréhension.

Après une première tentative, l'élève observe de nouveau le dessin autant qu'il le veut, et tente une nouvelle reproduction. Certains parviennent à une bonne reproduction en deux fois, mais certains vont faire des dessins qui vont s'éloigner de plus en plus du modèle. Après six tentatives, on peut considérer qu'il est inutile de continuer. Dans ce cas, on peut demander de faire le dessin avec le modèle sous les yeux, puis de le faire ensuite sans modèle. Si le résultat est concluant, on peut faire l'hypothèse d'une dominante kinesthésique.

Il est possible et même fréquent qu'un élève échoue au moins partiellement dans la reproduction du dessin parce qu'il ne s'est pas donné la bonne habitude évocative. Le dialogue précédent, quand il se fait dans une classe, va permettre de mettre en lumière les diverses évocations possibles. Un élève peut alors choisir les modalités qui lui conviennent. Rappelons que l'intérêt d'un tel exercice n'est pas d'effectuer une classification, mais de permettre à chacun de trouver le processus qui va lui permettre de réussir la tâche qu'il doit effectuer.

Une fois que l'élève a pu faire une hypothèse sur le mode d'évocation le plus efficace pour lui, on lui offre de vérifier cette hypothèse en faisant le même travail à partir d'un autre dessin de difficulté à peu près équivalente, mais cette fois en pratiquant l'évocation choisie. On peut alors constater s'il y a, ou non, amélioration.

Le dialogue après l'écoute et la reproduction du dessin

Après la lecture et la reproduction du dessin, on peut faire préciser les circonstances dans lesquelles un type d'évocation se produit en sortant du cadre du texte et du schéma mais en parlant de situations familières.

Dans le cas d'images visuelles, on précisera :
– la netteté de ces images ;
– leur stabilité ;
– leur fixité ou leur mobilité ;
– si elles constituent vraiment un premier plan ou si elles ne jouent qu'un rôle d'accompagnement ;
– si elles précèdent les mots ou si elles naissent dans leur prolongement.

On pourra aussi tenter de répondre aux questions suivantes :
– Les images visuelles concernent-elles plus facilement le passé, le futur proche, le futur lointain ?
– Sont-elles construites, imaginées ou sont-elles plutôt des photos d'objets ou de situations réelles ?
– Les images évoquées reviennent-elles inchangées au moment de les utiliser, ou sont-elles transformées ou encore ignorées ?

La constance des habitudes évocatives et leur indépendance de la nature de l'objet à percevoir

On constate la plupart du temps une certaine constance dans les processus mentaux utilisés dans les trois exercices précédents, comme si les habitudes évocatives étaient largement indépendantes des objets externes sur lesquels elles s'exercent, ce qui entraîne un écart important dans la réussite des exercices proposés. La même personne peut trouver très difficile l'exercice d'écoute d'un texte, ressentir une certaine panique pendant son exécution et réussir facilement l'exercice de reproduction du schéma sur le quadrillage. Plus que chaque exercice en particulier, c'est le rapprochement des modalités de l'évocation dans les trois exercices qui permet de se faire un portrait assez complet des diverses chaînes évocatives utilisées.

Il faut parfois nuancer cette indépendance du processus évocatif par rapport aux objets évoqués. On rencontre des élèves qui savent adapter leur mode d'évocation à la nature de ce qu'ils évoquent : ils évoquent auditivement ce qui est de nature auditive et visuellement ce qui est de nature visuelle. Ils réussissent très bien. Comme vous pourrez le constater, ce sont des cas assez exceptionnels. Inversement, il existe aussi des individus qui peuvent évoquer selon un mode ou l'autre, à la demande, mais qui ne superposent pas ces deux évocations et ne font pas de liens entre les deux. Les rares élèves de ce type que nous avons rencontrés avaient de grosses difficultés scolaires [10]. Les adultes, surtout s'ils ont l'habitude du travail intellectuel, tendent souvent à compléter leur mode évocatif dominant par des éléments de l'autre mode. En mathématiques en particulier, il est souvent nécessaire de partir du visuel pour aller vers la verbalisation, ou au contraire de partir de la verbalisation pour aller vers ce qui est visuel. On note cependant qu'il

10. Cas cités dans un rapport pour l'hôpital Sainte-Justine, Montréal (1990).

s'agit souvent, pour les gens que nous avons rencontrés, d'un geste mental plus complet, partant de ce qui est naturel pour aller vers l'autre mode. Ce n'est pas le cas des jeunes élèves et des adolescents, en particulier pour ceux qui sont en difficulté.

On peut donc, simplement à partir de ce genre d'activités, déterminer les modalités de l'évocation et comprendre le lien entre ces modalités et la nature de ce qui est gardé du texte. Cependant, il serait dangereux de croire qu'il est possible de caractériser l'activité mentale consciente simplement en déterminant s'il s'agit d'un visuel, d'un verbal, d'un auditif ou d'un kinesthésique. Nous donnerons quelques comptes rendus complets d'entrevues qui vont nuancer ce qui pourrait apparaître comme une classification par trop réductrice d'une réalité autrement plus subtile.

L'apprentissage de l'attention : le temps d'évocation et le projet

Il est indispensable de savoir écouter un texte et observer une image quand on veut suivre un cours ou simplement apprendre. Or, bien des enfants et bien des adultes en sont incapables. Il faut donc apprendre à tirer l'information d'un texte ou d'un schéma. Nous avons mis en évidence l'importance du temps d'évocation, distinct du moment de la perception. L'évocation est ce moment qui doit appartenir à chacun, où aucune stimulation externe nouvelle ne doit interférer avec le travail mental d'intériorisation.

Évoquer, c'est réaliser un projet personnel d'intériorisation. La mise au point de ce projet constitue l'apprentissage de l'attention. Les activités précédentes permettent de prendre conscience de certaines habitudes personnelles, de les comparer et de commencer à élaborer ce projet.

On peut poursuivre dans la même veine et continuer à apprendre à évoquer des textes et des schémas analogues à ceux qui sont présentés ici, jusqu'à ce que les performances paraissent satisfaisantes. Dans bien des cas, il n'est pas nécessaire de travailler spécifiquement sur de tels exercices en dehors de la présentation des énoncés ou des figures en mathématiques.

En précisant le plus possible les habitudes évocatives, on prend surtout conscience de l'importance de l'évocation, et c'est là l'essentiel. Si un joueur de tennis regarde les rayures de la balle qu'il veut frapper, ce n'est pas que les rayures soient intéressantes, c'est qu'il est sûr de cette façon de voir la balle. C'est un peu la même chose pour les habitudes évocatives : en déterminer les modalités est un moyen de comprendre la nécessité de l'évocation.

Dans la suite, nous ne caractériserons les modalités évocatives que dans la mesure où cela est nécessaire. Si la dichotomie « visuels-auditifs » est suffisante, nous nous en tiendrons là. Si l'analyse demande plus de précision, nous ferons des distinctions entre verbaux et auditifs et nous aborderons le cas des kinesthésiques.

Rappelons que chaque élève doit trouver le chemin qui lui convient et que le danger est toujours grand de lui indiquer une fausse route, ou de croire qu'il suffit de séparer « les visuels » des « auditifs » pour régler tous les problèmes. L'évocation est un processus pouvant être complexe, souvent rattaché à des traits fondamentaux de la personnalité. Le chemin qui permet d'aller à la rencontre de l'élève peut être tortueux. C'est ce que nous préciserons plus loin en parlant de « chaîne évocative » plutôt que d'évocation et de « canaux de communication ».

Faisons le point

Rappelons les mots importants : perception et évocation, chaîne évocative, modalités de l'évocation, geste mental, projet.

La mémorisation, la compréhension reposent sur ce qui est évoqué et non pas simplement sur ce qui nous est présenté. Ce qui compte, ce n'est pas seulement ce qu'on nous dit ou ce qu'on nous montre, mais ce qu'on

se dit, ce qu'on imagine, ou ce qu'on fait en écho aux événements extérieurs. Nous appellerons évocation ce retour sur nos impressions pour en extraire le sens.

Ce retour se fait après la perception qui ne nous laisse que des impressions.

Il faut donc un temps d'évocation après la perception. C'est dans le moment de silence qui suit un énoncé non trivial que son sens nous apparaît. Sans moment d'évocation, il n'y a pas d'intégration des notions nouvelles.

Les modalités de l'évocation agissent comme un filtre entre les événements extérieurs et nous :

– une évocation visuelle privilégie spontanément les notations et les relations spatiales ; elle débouche sur une compréhension globale ;

– une évocation verbale ou auditive privilégie les notations et les relations temporelles ; elle débouche sur une compréhension séquentielle ;

– une évocation kinesthésique part de ce qui est ressenti.

Ce n'est pas parce qu'on a conscience d'images visuelles que l'on pratique une évocation visuelle, ce n'est pas parce qu'on parle beaucoup qu'on pratique une évocation verbale. On pratique le plus souvent une « chaîne d'évocations » qui part des mots et peut se terminer par des images, ou au contraire part de l'image et se termine par des énoncés. Une évocation kinesthésique part de ce qui est ressenti ou ce qui est fait pour aboutir à des images visuelles ou, plus souvent, à des énoncés.

Une même personne peut traiter selon des modalités différentes les objets concrets, les mots, les relations et ce que nous élaborons nous-mêmes.

Nous avons tous des habitudes évocatives, plus ou moins riches, qui nous sont personnelles. Si nous sommes dans une situation où nous ne pouvons pas les exercer, nous nous trouvons en situation d'échec.

La connaissance des « chaînes évocatives possibles » permet de créer des situations d'apprentissage profitables à un nombre plus grand d'élèves.

Un geste mental est un traitement mental que nous faisons subir à des représentations mentales. Pour retenir, comprendre, résoudre un problème, nous devons faire des gestes mentaux. La connaissance de ces gestes mentaux nous permet d'améliorer nos performances.

Nous avons donné des moyens d'analyser les habitudes évocatives. Rappelons qu'il faut rester extrêmement prudent et que c'est à l'élève de choisir.

II

Le projet d'être et le projet de faire des mathématiques

Dans le chapitre précédent, nous avons donné des moyens de préciser le processus évocatif et le projet implicite qui le sous-tend. Les exemples qui suivent vont mettre en évidence le lien entre certains aspects profonds de la personnalité, les habitudes évocatives et la relation aux mathématiques. Jacques Nimier [1] a montré, en utilisant l'outil psychanalytique, l'importance de l'inconscient dans la relation que l'étudiant, le professeur et le chercheur entretiennent avec cette discipline. Nous l'avons déjà dit, nous ne voulons pas nous placer sur ce terrain mais simplement nous limiter à l'aspect évocatif qui nous fournit souvent des informations précieuses.

Les adolescents ont souvent une idée de ce qu'ils sont ou de ce qu'ils veulent être qui se trouve en contradiction avec leurs croyances quant à l'activité mathématique. Il n'y aura

1. *Mathématiques et affectivité. Les modes de relation aux mathématiques*, Psychologie sociale, Méridiens Klincksieck ; *Entretiens avec des mathématiciens*, IREM de Lyon.

pas de progrès sans réconciliation du « projet d'être » et du projet « de faire des maths ». La prise de conscience du processus d'évocation, à la fois révélateur et objet d'intervention, va offrir une aide précieuse.

CAS DE D., OU LA CONFUSION À LA RECHERCHE D'UNE MÉTHODE

D. vient d'achever sa deuxième terminale [2]. Malgré un mois de travail intensif avant l'examen, il a encore échoué et vient de passer cinq mois de « galère ». Il désire reprendre des études, il ne sait trop dans quelle direction. Il se voit dans une « profession indépendante ».

Écoute du texte [3]

Après une première écoute du texte, il parle surtout de l'atmosphère générale : le personnage principal, dont il a oublié le nom, lui semble « asexué ». « C'est un personnage de bande dessinée. Il y a de la brume, un peu de soleil. Il oublie tous les mauvais souvenirs de la période qu'il vient de vivre. Il profite de l'instant. Il se sent bien. Il ressent profondément sa liberté retrouvée. »

Certaines parties du texte reviennent spontanément : « Les gardes le saluèrent poliment. Il quitta la ville », et particulièrement celles dont il n'a pu comprendre le sens : « Il revivait maintenant trop souvent des moments révolus de son propre passé, non par regret ou nostalgie, mais parce que les cloisons du temps semblaient avoir éclaté. »

Il a gardé dans l'oreille certains sons autour desquels il reconstruit un sens : de la phrase « Il vit *La Belle Colom-*

2. Fin de CEGEP au Québec.
3. Il s'agit du texte 1 présenté au chapitre précédent (p. 37).

belle déployer sa voile », il garde « belle » et « voile » et me parle d'une femme très séduisante.

Les descriptions d'actions précises lui ont complètement échappé : le pont-levis qu'on abaisse, la marche rapide le long du canal, le village qu'il évite pour regarder la mer en montant sur une dune. La distance entre la dune et la mer n'est pas mentionnée non plus.

La deuxième et la troisième lecture lui permettront des corrections mineures. Ce n'est qu'à la dernière lecture qu'il prend conscience que *La Belle Colombelle* est un bateau. Il a du mal à se faire des images (deuxième lecture).

Quand il a les mots en tête, il peut se donner des images. Ces images sont simples, presque stylisées mais floues et enchaînées. Il reste toujours spectateur. Il n'a pas de mémoire visuelle. Il ne peut se faire d'images visuelles à propos de sentiments ou de sensations.

Lorsqu'il se redonne le texte auditivement, c'est la voix du lecteur qu'il entend. Souvent il interprète tout un texte à partir d'un seul mot : « belle » et « voile » ont suggéré une « femme séduisante ». Il fait souvent des contresens, ou résout en mathématique un autre problème que celui qu'on lui a posé.

Bien que sensible aux sons et aux mots, il dit ne pas avoir de mémoire et ne pas pouvoir retenir de chansons (air et paroles). Il dit ne pouvoir comprendre et garder que ce qui l'émeut profondément.

Quoique restant toujours extérieur à l'action décrite, il peut se plonger complètement dans un livre à condition d'éprouver des sentiments forts.

Il a un grand désir de logique : il recherche la cohérence. Il voudrait avoir une méthode pour comprendre, pour travailler et même pour vivre, alors qu'il vit dans l'incohérence et qu'il ne sait pas du tout comment aborder un problème. Il attend un miracle, un « déclic » qui va tout changer.

Reproduction du dessin

Il va s'y reprendre à quatre fois avant de parvenir à reproduire le dessin. La première fois, il ne placera pas les sommets de la figure sur les nœuds du quadrillage. Il s'en tiendra à « une impression générale ». Il finira par y arriver après s'être donné une description complète de la façon de faire le dessin.

Quand il doit résoudre un problème, D. parle tout le temps et jette des chiffres dans tous les sens sur le papier. En mathématiques, il ne s'est jamais rien représenté visuellement. Il ne sait pas montrer approximativement ce qu'est un mètre carré. Il ne sait pas résoudre le problème suivant : Je multiplie les côtés d'un carré A par 3 pour obtenir un carré B. Par quel nombre doit-on multiplier l'aire du carré A pour obtenir l'aire du carré B ?

Il ne sait pas ses tables de multiplication.

D. est quelqu'un d'intelligent, probablement au-dessus de la moyenne.

Interprétation

Compréhension auditive, images floues dans le prolongement des mots, verbal au moment de l'action

D. a une compréhension auditive : les mots lui restent en tête, les images sont floues et enchaînées. Il donne du sens à partir de quelques éléments, sans vérifier ensuite. Quand il agit, il est verbal : il se parle et agit dans le prolongement de son discours. Il est en troisième personne : il observe, il se voit agir. Mais ces caractéristiques ne suffisent pas à interpréter le comportement de D.

Absence délibérée de projet et importance du ressenti

Il ne veut vivre que dans le présent et ne veut pas avoir de projet. Le présent est le domaine du ressenti. Seul compte ce qu'il éprouve dans l'instant. Ces deux aspects sont liés : si seul importe ce qui est éprouvé dans l'instant, l'idée même de projet est absurde. Le projet sort du ressenti et demande de se « projeter » dans l'avenir. Pour des individus comme D., un projet demande un arrachement contraire à leur désir le plus profond.

Si on lui demande comment il se prépare à une rencontre avec un employeur potentiel, il répond qu'il ne se prépare pas, ni en se donnant des images possibles de cette rencontre, ni en se répétant ce qu'il va dire. Rien. Demain est vraiment un autre jour...

C'est une attitude fréquente chez bien des adolescents en difficulté. Un jeune qui voulait faire du théâtre disait aussi vivre dans l'instant et ne pas vouloir se donner de projet parce que ça l'arracherait au moment présent, donc à la vie. Je lui demandais comment il faisait alors pour apprendre ses rôles : il ne les apprenait pas. Il ne voulait faire que de l'improvisation. Tout son travail préparatoire à son entrée en scène consistait à faire le vide pour pouvoir ressentir au maximum « l'atmosphère de la salle ». Entre le ressenti et l'action, il n'y a rien. Tout est impulsivité. Le temps d'évocation n'existe plus.

Ce désir de vivre uniquement dans la sensation de l'instant faisait que D. aimait particulièrement les jeux de rôles [4] : « Tu peux créer un monde artificiel, on vit une aventure sans risque, on déconnecte complètement, plus c'est pourri, mieux c'est ! » Il jouait sans méthode et il éprouvait des « trucs formidables » !

Ce désir de « déconnecter du réel » peut aller chez certains jusqu'aux drogues plus ou moins dures : c'est la plongée dans la sensation, dans un monde où l'avenir n'existe pas.

---

4. Jeux dont le prototype est « Donjons et dragons » : chacun vit des aventures extraordinaires dans la peau d'un personnage imaginaire doué de pouvoirs magiques.

Comprendre oui, apprendre non !

Ne vouloir vivre que dans les sensations du présent fait que D. considère que comprendre est important, mais qu'apprendre est futile : quand on a compris, on sait, on n'a pas besoin d'apprendre ; et même apprendre est réservé aux imbéciles ! Comprendre se fait dans l'instant, apprendre concerne le futur. L'opposition entre comprendre et apprendre est souvent exprimée très fortement chez les adolescents qui ne veulent éprouver que les sensations du moment. Bien sûr, ces adolescents se plaignent de ne pas avoir de mémoire. Pour mémoriser, il faut dans le présent avoir un projet concernant le futur. Si le futur n'existe pas, il n'y a pas de raison de se donner les outils nécessaires à la mémorisation.

On voit donc les difficultés que D. pouvaient éprouver en mathématiques : son traitement exclusivement auditif et verbal l'éloignait de tout ce qui était concret. Il aimait les idées générales, mais pas les faits précis ni les nombres. Il ne voulait rien mémoriser. Ne voulant se donner aucun projet, il ne pouvait rien organiser et se laissait porter par l'action immédiate dirigée par son discours intérieur, discours sans direction générale. L'absence de projet, autre que celui de ne pas en avoir, faisait qu'il lui semblait absurde de travailler aujourd'hui pour demain.

Attente du déclic, explication par le blocage

D. attend le déclic, moment magique, inopiné qui risque de transformer l'échec en réussite. Le pendant du déclic est le blocage, terme emprunté à une psychologie un peu sommaire. Le blocage lui aussi vient d'ailleurs. Quand il y a blocage, il n'y a rien à faire : « Je n'y peux rien, je suis bloqué ! » De blocage en déclic, D. ne se sent pas vraiment responsable de ce qui lui arrive. Les raisons de ses échecs et de ses réussites sont en dehors de lui. C'est sans doute la première croyance qu'il faudra modifier.

Si l'on résume :
– tout se passe en dehors de lui ;
– pas d'actions, seulement des réactions ;
– pas d'évocation, seulement du ressenti ;
– pas de projection dans l'avenir.

Un élément sur lequel on peut s'appuyer pour l'aider : une certaine image de soi

Par contre, D. avait un instinct de survie assez fort et un grand désir de cohérence, un besoin de « méthode ». C'est à partir de là qu'il fut possible de l'aider. Il prit conscience qu'il ne pouvait mémoriser un texte que très partiellement, et seulement dans la mesure où il était fortement impliqué émotivement. Il fut aussi particulièrement frappé par le fait qu'il lui fallut s'y reprendre à quatre fois pour refaire le dessin. Il y avait quelque chose d'intolérable pour lui, car il s'estimait, à juste titre, intelligent. Ayant pris conscience qu'il ne pouvait même pas réaliser des tâches très simples, il était prêt à acquérir une méthode générale qui lui permettrait de résoudre ce problème. Il s'intéressait à une méthode dans la mesure où elle était assez générale pour concerner de nombreux aspects de la vie, et pas seulement les mathématiques. Comme beaucoup d'auditifs ou de verbaux portés naturellement à s'analyser, le fait de lui offrir un moyen de se comprendre, de comprendre qui il était, lui plaisait.

Son incapacité à prévoir aujourd'hui ce qu'il allait faire demain lui apparaissait toujours plutôt comme une qualité, mais il était prêt à faire des tentatives pour prévoir aujourd'hui une action à faire le lendemain. Ce « diagnostic » n'était pas un jugement. Nous l'avons fait ensemble à partir des activités et de la discussion que nous avions eues. Nous avons décidé ensemble d'un programme qui consistait à rechercher des « méthodes qui permettraient d'observer, de retenir, de mémoriser, de prévoir et de résoudre certains problèmes ». Soulignons « méthode » : alors que D. donnait l'impression de ne surtout pas en vouloir, c'est justement ce qu'il recherchait. Il y avait sans doute en lui l'espoir du miracle, quand la « méthode » ne devient qu'un « truc », espoir qu'il faut se garder d'entretenir. Nous avons toujours insisté sur le fait qu'il était complètement responsable de ce qu'il apprenait : quand il suivait « la » méthode, ça marchait, quand il ne le faisait pas, ça ne marchait pas.

Bien souvent les auditifs ou les verbaux aiment qu'on leur donne des méthodes de travail qu'ils peuvent se dire. Mais dans le cas de D., ces méthodes, bien que concrètement efficaces, étaient d'abord un moyen de se rapprocher de celui qu'il imaginait être. Il avait compris aussi qu'il était responsable de son apprentissage. Ce ne sont pas les autres, mais lui seul qui peut faire les gestes qui lui permettront d'apprendre.

L'évocation, ce retour sur soi-même, tampon entre la sensation et l'action, espace où germe la liberté d'action, lui fournissait un moyen de se construire.

CAS DE B., OU L'INCOHÉRENCE D'UN MONDE SANS STRUCTURE

B. est en troisième. Ses résultats scolaires sont catastrophiques. Il a toujours eu des difficultés en mathématiques. B. voudrait être pilote d'hélicoptère et rêve de faire une école militaire. En attendant, il veut tenter un BEP d'électronique [5].

Écoute du texte

Il donne le sens général du texte sans chercher à retrouver le vocabulaire particulier : « Un homme arrive à la porte d'une ville, il entre et les gardes le saluent. Il voit des marchands et il fait allusion à ses soucis. Il les écarte. Il parle du temps écoulé. Il se retourne pour regarder la mer et voit un bateau. »

---

5. CEGEP au Québec.

La structure générale du texte est bien là, mais il n'y a aucun détail précis. B. aime écouter les gens parler. Il est sensible à la voix et se laisse bercer. Les mots reviennent facilement quand il le faut, mais il cherche à faire des liens. Il reformule ce qu'il entend pour mettre en évidence ces liens et aussi parce que tout ce qui est précis et concret l'ennuie. Il ne se fait aucune image de l'avenir. Il a certaines images floues et fugitives de ce qu'il a vécu. Quand il travaille, il se parle beaucoup.

B. a donc une structure « auditive » très dominante. Hormis son manque de précision, rien ne semble *a priori* devoir l'empêcher de faire des mathématiques. Bien plus, il mémorise assez facilement le schéma, puisqu'il ne s'y reprend qu'à deux fois pour le reproduire convenablement. Il a donc de bonnes capacités d'observation.

B. a besoin de savoir d'où viennent les choses, il voudrait « comprendre ». Pourtant, il pense que 1/3 est la moitié de 1/2, il ne sait pas faire le moindre calcul, ne connaît aucune table. Les mathématiques l'effraient complètement.

Voici les verbes qui lui paraissent correspondre le mieux à ce qu'il voudrait être : être libre, communiquer, rêver, faire confiance, aimer, créer, dormir s'évader ; et il rajoute : agir. « Je ne peux pas agir, je voudrais faire mes rêves, faire mon travail scolaire, mais je ne peux pas. » Il poursuit : « Je voudrais pouvoir, savoir, mais c'est la vie qui forme le savoir. »

Et il décrit comment il se sent en mathématiques : il a l'impression de n'avoir aucun contrôle. Il agit pratiquement au hasard. Face à un problème, il fait des opérations mais n'est capable d'en justifier aucune. Ce sentiment d'impuissance le submerge, mais il le ressent dans bien d'autres domaines que les mathématiques.

« En mathématiques, tu agis sans savoir pourquoi : est-ce que tu monterais dans un hélicoptère piloté par quelqu'un qui ne saurait pas ce qui se produit quand il tourne une manette ?

– Non, bien sûr...

– Les mathématiques justement sont un domaine où tu peux tout contrôler. Chaque fois que tu écris quelque chose, tu peux le faire en sachant pourquoi. Chaque signe, chaque règle a sa raison d'être. »

B. est étonné puisqu'il ressent exactement le contraire.

Les éléments sur lesquels on peut s'appuyer pour l'aider

B. a une structure qui peut paraître analogue à celle de D. : auditif sans projet, il subit et rêve de force et d'une autorité qu'il ne supporte d'ailleurs pas. Il a déjà fait l'expérience d'une école militaire. Mais, alors que D. vivait dans la confusion, B. vit vraiment dans l'incohérence. Alors que D. avait besoin d'une méthode, B. a avant tout besoin d'un univers structuré et cohérent, ce que les mathématiques peuvent lui offrir si elles lui sont présentées non pas comme un ensemble de règles arbitraires à suivre, mais comme un ensemble cohérent dans lequel les liens sont toujours explicités. Il ne faut pas lui présenter les mathématiques comme un ensemble fermé de théorèmes et de règles, mais comme une construction cohérente à laquelle il participe.

B. ne possède aucun langage intérieur mathématique. Avec lui, il faudra repartir à zéro, de l'addition et du nombre, et construire avec lui un édifice dont on montrera la logique. Ce sont ces liens logiques qu'il devra verbaliser. B. a besoin de sécurité. Il faudra être ferme avec lui sans être agressif. Dans la mesure où il pourra expliquer et justifier, B. retrouvera une certaine confiance en lui. Pouvoir faire des liens est en effet le projet implicite qu'il poursuit. C'est celui qui doit devenir explicite et être poursuivi en particulier en mathématiques.

Chez lui non plus, le temps d'évocation n'existe pas. Bien que tourné vers lui-même, il n'est qu'un écho de sensations venant de l'extérieur et qu'il ne maîtrise pas.

CAS DE C.
LES IMAGES L'ÉLOIGNENT DU RÉEL

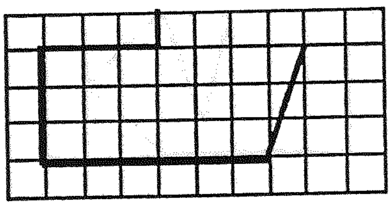
C. est en troisième. L'école est pour lui un lieu d'ennui mortel. Il ne réussit pas du tout en mathématiques.

Écoute du texte

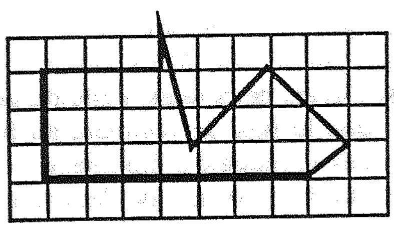
C. redonne presque textuellement les parties 1, 2, 3, 4. La partie 5 est rendue par « il fait beau». La partie 6 par «il a eu des problèmes». Les parties 7 et 8 sont ignorées. Il redonne certains éléments des parties suivantes: il dit qu'il «voyait» Zénon, le château, etc. Les images sont mobiles et assez nettes. Cela est confirmé par le fait que les parties 6, 7 et 8 sont presque ignorées. Avant de conclure trop vite que C. est visuel, observons comment il effectue la reproduction du dessin.

Mémorisation d'un dessin

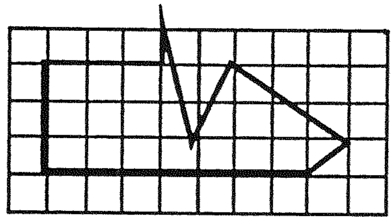
Il observe longuement le dessin (plus d'une minute). Voici son premier essai:



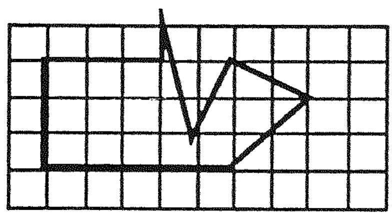
Il compare ce qu'il a fait à l'original. Voici son deuxième essai.



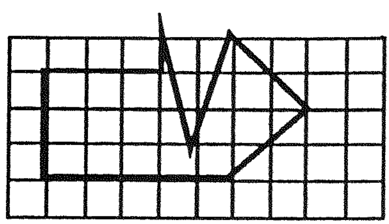
De nouveau il compare son dessin à l'original et fait son troisième essai :



Même chose :



Et enfin :



C'est au cinquième essai que C. parvient à reproduire le dessin. Il explique : « Je regarde le dessin pour essayer de l'associer à quelque chose de déjà vu. J'ai l'image dans la tête et je peux commencer. Mais l'image devient floue. C'est comme si j'avais deux télés, celle du dessin à faire et celle du dessin que je fais. Je compare au fur et à mesure que je dessine mais le modèle s'éloigne. »

« C'est très difficile pour moi de décrire le dessin quand je le regarde, dit-il. Et puis c'est pas une image qui m'intéresse vraiment, c'est une image morte. »

Il a une impression générale visuelle du dessin. Il tente de placer le dessin globalement dans la grille, par rapport aux bords de la grille. Il ne s'en n'est donc pas donné une description intrinsèque. Ensuite il corrige un élément à la fois. Bien qu'il semble utiliser des images visuelles, ces images sont imprécises.

Si on lui demande comment il se voit dans dix ans, il décrit avec beaucoup de précision « son magasin », les « fringues » qu'il va vendre. Les images sont précises, vivantes. Il dit qu'il se fait des « images imaginaires » et il en ressent beaucoup de plaisir. Mais ces images sont souvent précédées par des mots : « C'est comme s'il y avait un mec qui me parle. Je m'invente des histoires, je m'évade. » Autrement dit, la vie mentale de C. se situe dans une certaine forme de rêve dans lequel les mots se transforment immédiatement en images. « Je me vois faire souvent des choses que je ne fais jamais. »

Il peut aussi se donner des images qui vont lui rester : « Pour apprendre des phrases, je grave une plaque de marbre gris. Quand j'en ai besoin, le texte défile. » Là encore, image construite, mais non pas image reflet de la réalité. On retrouve souvent cette « plaque de marbre » qui peut prendre la forme d'un écran, d'un tableau ou de tout autre support mental sur lequel on grave ou on écrit mentalement. Pour apprendre, C. dit qu'il doit écrire.

Quand il regarde quelqu'un faire, il « s'explique » ce que l'autre fait et « construit une image ». Les images sont toujours construites et ne sont jamais la représentation du réel. Lorsqu'on lui demande de donner une représentation imagée du temps, il dessine un bonhomme qui avance vers la droite.

Mais si on commence à parler mathématiques, son attitude change complètement : il se voûte, son visage se ferme ! En maths, il ne se fait jamais d'images : il n'y a rien à imaginer ! Il ne se dit rien non plus puisqu'il n'y a que des règles à appliquer. Ainsi, pour lui, les mathématiques sont le domaine de la règle rigide à suivre alors qu'il ne se sent vivre mentalement que dans l'imaginaire.

Interprétation

Des images « imaginaires » sur des mots

C. a ainsi de nombreuses caractéristiques visuelles dans le sens où l'image joue un rôle essentiel dans sa vie mentale, non pas l'image photographie du réel, mais l'image associée souvent à des mots « qu'un autre dit ». Il a un grand plaisir à se donner des images mentalement : il peut faire passer un film qu'il connaît bien dans son magnétoscope, mais il ne regarde pas l'image, il écoute les dialogues, et les images lui reviennent. L'image réelle l'intéresse moins que les mots.

Le passage des mots à l'image se fait assez bien, mais l'inverse est plus difficile surtout s'il s'agit d'une image réelle comme le montre le travail fait sur le dessin. Les images sont souvent le résultat d'une description, mais aussi d'une action imaginée comme la gravure des mots dans la plaque de marbre. Ces images construites lui reviennent facilement.

C. ne photographie pas mais élabore des images, et des images à long terme

C. ignore la réalité. Il a des projets à long terme mais aucun pour demain. Il est visuel, mais seulement pour ce qui est éloigné dans le temps.

C. pratique l'évasion

C. est désolé par son incapacité à faire attention : on comprend ce qui se passe. Dès que quelque chose l'ennuie, il s'évade dans les mots et les images et se plonge dans un monde autrement plus riche pour lui que l'univers des « règlements mathématiques ». Il pense donc qu'il lui faut s'empêcher de rêver, s'empêcher de jouer. Il fait de grands efforts dans ce sens, mais comme il ne sait pas quoi faire à la place... il ne trouve que l'ennui et le vide.

Les éléments sur lesquels on peut s'appuyer pour l'aider

Apprendre à reproduire

C. a été frappé par le fait qu'il doive s'y reprendre à cinq fois pour reproduire le dessin et il serait prêt à travailler pour apprendre à reproduire dessins, schémas, aussi bien que des textes lus ou entendus si l'on veut bien l'y aider. Par là il devra contrôler son impulsivité.

Il a aussi un certain sens des nombres sur lequel on peut s'appuyer pour introduire l'algèbre.

Imaginer des représentations

Il faudra lui présenter les mathématiques de façon à ce qu'il sente qu'il s'agit d'un domaine où il est possible d'expliquer, d'interpréter et d'imaginer des représentations de ce qu'on lui apporte. On pourra aussi lui demander d'interpréter des schémas et de faire le lien avec des expressions numériques et algébriques. C. ne deviendra actif mentalement en mathématiques que s'il peut donner un tour personnel à ce qu'il apprend. Quand il écoute une explication, il doit pouvoir se dire : « Comment est-ce que je vais bien pouvoir traduire ça ? Par quel dessin, quelle image, quelle association ? » Les applications pratiques lui paraissent insignifiantes, mais la tournure personnelle qu'il peut leur donner l'intéresse.

Apprendre et comprendre

Enfin il faudra qu'il fasse la distinction entre comprendre et apprendre, et qu'il se donne les moyens d'apprendre ce qu'il a compris. Cela ne se fera que si apprendre devient un projet important, ce qui ne se fera que si les autres étapes ont été franchies. Il pourra apprendre ce qu'il aura lui-même formulé, ce qui sera sa « création ».

C. n'a aucun sens de l'évocation. Il se dit prêt à apprendre ce travail mental, travail sur lui qui peut lui permettre de se construire un espace vital entre le rêve éloigné, riche et vivant et le futur immédiat sombre et hostile.

C. cherche à s'évader du monde réel, sans doute pour des raisons psychologiques profondes. Ses habitudes évocatives s'en trouvent affectées. Il ne pourra s'en sortir seul, ni même avec une aide sporadique. La compréhension du processus évocatif ouvre un domaine d'intervention, un lieu où peuvent se rencontrer un adulte aidant et C. On peut tenter de réconcilier C. avec la réalité simplement en travaillant à partir de ses habitudes évocatives, mais il s'agit d'une action à long terme.

CAS DE G. : DES IMAGES POUR LE PASSÉ ET DES MOTS POUR L'AVENIR

G. a laissé le collège en quatrième. Il était déjà dans des classes spéciales. Il voudrait pouvoir faire des maths pour réaliser ce qu'il projette et dont il ne veut pas parler. Il est très angoissé.

Écoute du texte

C'est l'histoire d'un homme, Zénon, qui a eu des problèmes. Il est rejeté et doit quitter un château. Il est un peu en extase, mais le voyage va lui faire du bien car il a beaucoup souffert, etc.

G. ne donne que des indications concernant le ressenti de Zénon. Il n'y a à peu près pas d'indications précises. G. dit qu'il se met à la place de Zénon. Par contre, des parties entières de phrases peuvent lui revenir sans qu'il en comprenne le sens. Il comprend beaucoup mieux à l'écoute qu'à la lecture. Il voudrait connaître beaucoup plus de vocabulaire, même en mathématiques. Il comprend un texte en le comparant à ce qu'il a vécu et peut en déformer complètement le sens.

Ces indications nous permettent de dire que G. a une grande composante auditive et kinesthésique ; mais cela ne veut pas dire qu'il ne puisse pas utiliser des images.

Mémorisation d'un dessin

C'est une activité très difficile pour G. Il ne parvient pas à analyser la figure pour la mémoriser. Il parvient difficilement à la reproduire à vue et devra s'y reprendre à deux fois. Autant il aime s'analyser et fait souvent des observations très justes, autant il parvient mal à analyser une figure simple. Il se souvient de la façon dont il a effectué le dessin.

Les images concernent seulement le passé, et les mots, l'avenir

Il peut revoir les lieux où il est allé, les gens, les situations déjà vécues, surtout s'il a éprouvé des sentiments assez forts à cette occasion. Il dit que « les images concernent le passé et que l'avenir est sans image », que les « images le sortent de lui-même et que les mots l'y ramènent ». Les mots lui permettent donc de s'analyser, mais pas d'analyser ce qui lui est extérieur.

Il est impossible à G. de se construire des images qui ne soient pas plus ou moins une reproduction d'une réalité passée. Il choisit des stratégies de résolution de problèmes de type verbal. L'image ne l'aide pas à comprendre ni à faire des liens. Il faut lui donner du vocabulaire, lui expliquer le sens des mots, lui décrire verbalement les règles. Il attache aussi beaucoup d'importance aux faits concrets. Il faudra donc lui donner des exemples précis.

L'importance qu'il donne à ce qu'il ressent fait que l'exercice est pour lui très important. Il doit faire d'abord et parler de ce qu'il a fait en utilisant un vocabulaire toujours plus précis. Une fois ce travail fait, on peut lui donner des représentations imagées de ce qui a été fait. Il aura le vocabulaire et l'expérience pour en parler. Ces représentations imagées jouent un rôle important dans la mémorisation.

G. est angoissé. Le monde lui paraît hostile et il ne se sent bien que chez lui. Il n'évoque pas les événements externes. Est-ce l'angoisse qui a coupé les liens avec le présent ou l'absence d'évocation qui engendre l'angoisse ? On ne peut répondre, mais on peut aider G. à apprendre à évoquer ce qui l'entoure. Il a peu à peu pris conscience de l'impossibilité de faire des mathématiques sans en passer par là. Nous avons donc commencé à travailler sur la reproduction de schémas et sur le calcul mental, ce qu'il a accepté volontiers. Il n'a jamais manqué une seule séance.

QUELQUES CONSTANTES

La vie mentale est imbriquée dans l'histoire de l'individu

– Si l'on va au-delà de la simple catégorisation en « auditif » et « visuel », on se rend compte que la vie mentale est imbriquée dans l'histoire de l'individu. Par exemple D. et B. partagent certaines caractéristiques :

– le rejet de tout projet qui les sortirait de la sensation du moment présent ;

– l'absence d'évocation : il n'y a rien entre la sensation et l'action ;

– le mépris de ce qui est concret, utilitaire ;

– la difficulté à se donner une stratégie pour résoudre un problème, mais plutôt l'habitude de se lancer successivement dans toutes les directions sans aller au bout d'aucune ;

– la croyance qu'il est noble de comprendre et dévalorisant d'apprendre ;

– le refus du problème : devant un énoncé, ils sont prêts à vous expliquer pourquoi cet énoncé devrait être modifié.

C., quant à lui, ne vit pas dans la sensation de l'instant. Au contraire, il s'évade dans une imagerie lointaine qui l'arrache au présent. Pour le reste, il est très semblable à B. et D. Comme eux, il refuse le lien entre le présent et le futur. B. et D. refusent l'idée même du projet qui les couperait, croient-ils, de la sensation du présent. C. ignore le projet puisqu'il ignore le présent et se réfugie dans un futur imaginaire. Le cas de C. est beaucoup plus sérieux que les autres.

B. et G. distinguent d'ailleurs fort bien comprendre, ce qui se vit dans le présent, d'apprendre, ce qui est une projection vers le futur. Ces adolescents refusent l'idée même de ce genre de projets parce qu'ils ont l'impression de se couper de la « vraie vie ». La réussite sociale leur paraît hors de portée. Ils ne veulent pas « faire », mais veulent « être ». C'est une des caractéristiques de l'adolescence que de partir ainsi à la recherche de soi. L'âge adulte, comme l'enfance, est plus tourné vers le « faire ». Mais on ne peut « être » sans un minimum de « savoir-faire ».

Nous avons toujours trouvé les cinq caractéristiques précédentes en même temps chez ceux qu'on pourrait qualifier « d'enfants sans père », c'est-à-dire d'enfants dont le père n'est pas présent physiquement ou absent psychologiquement. Nous avons aussi rencontré le même profil chez de jeunes Africains élevés uniquement par des femmes, leur père étant polygame. Nous ne voulons pas dire que tous les enfants sans père ont ce profil, mais tous les enfants en difficulté en mathématiques qui avaient les caractéristiques précédentes étaient des « enfants sans père » [6]. On pourrait donc en déduire que les jeunes ne pourront surmonter leurs difficultés que par un traitement de nature psychologique.

6. Voir *Père manquant, fils manqué*, Guy Corneau, les Éditions de l'Homme.

Or, nous avons de nombreuses expériences qui nous montrent qu'il n'en est rien : en prenant conscience de leurs habitudes mentales, avec un « adulte masculin non agressif mais ferme », ils ont pu modifier leurs habitudes évocatives. Il n'a pas suffi qu'on leur explique leur façon de gérer leur vie mentale, il a fallu aussi qu'ils prennent conscience du lien direct entre certaines difficultés rencontrées et leurs habitudes mentales. Ils avaient aussi compris que le travail évocatif qu'ils effectuaient confortait leur « projet d'être ».

Parmi eux, on retrouve beaucoup d'auditifs et de verbaux avec une grande composante kinesthésique. Ils sont portés à l'auto-analyse, éloignés du concret qu'ils méprisent. S'ils ne sont pas partie prenante à un projet dirigé vers un « mieux faire », ils sont très sensibles à un projet qui ferait d'eux des « êtres différents » et qui leur permettrait de mieux se comprendre. Ayant pris conscience de leur difficulté à effectuer des tâches relativement simples, comme redonner les éléments principaux d'un texte entendu, ou refaire de mémoire un schéma élémentaire, ou expliquer une semaine plus tard ce qu'ils avaient pourtant bien compris, ils sont prêts à prendre les moyens non pas de mieux faire, mais d'améliorer leurs capacités intellectuelles, c'est-à-dire devenir différents.

L'évocation est un moyen de réaliser le « projet d'être » de certains adolescents

Un travail d'évocation systématique, à condition qu'il soit considéré comme le moyen de réaliser le projet personnel dont nous venons de parler, va permettre de sortir du schéma sensation-action qui enferme de nombreux adolescents dans la seule perception du présent. Le travail d'évocation peut porter sur des textes, des figures, des calculs numériques [7], des méthodes de résolution de problèmes.

---

7. Nous aborderons plus loin l'importance d'un certain calcul mental dans l'élaboration des concepts mathématiques.

Habituellement ce travail peut se faire sans avoir à sortir du cours normal de mathématiques. Dans certains cas, ce travail devra être systématique et se faire en dehors de toute prétention d'atteinte d'objectifs de contenu d'un programme.

Le ressenti est important. Il peut être essentiel comme point de départ d'une évocation qui projette dans l'avenir. Mais si l'on reste «au niveau du vécu», il n'y a pas d'apprentissage possible.

FAISONS LE POINT

Pour apprendre, il faut établir un lien entre le présent et le futur. Autrement dit, il faut avoir un projet.

De nombreux adolescents refusent toute idée de projet, soit qu'ils veulent rester tout entier dans la sensation du présent, soit qu'ils refusent le présent pour s'évader dans un avenir imaginé. Pourtant, ils voudraient «être»: être intelligents, forts, habiles, mais sans jamais avoir à se confronter à la réalité. Ils tentent «d'être» sans jamais avoir à «faire». «Faire» est même souvent considéré comme méprisable. Leur projet personnel est, croient-ils, plus élevé.

Le processus évocatif établit un lien personnel et étroit entre la vie intérieure et une tâche à accomplir. Ce lien passionne souvent ce type d'adolescent. Il y a là un moyen de réconcilier leur projet d'être et l'action concrète. Il sera souvent nécessaire de les engager alors dans une série d'activités systématiques.

Le projet est le moteur de l'activité intellectuelle. Le projet impose d'interpréter le présent pour agir sur l'avenir.

Quand il y a contradiction entre le projet de l'enseignant et le projet même implicite de l'élève, on dit que l'élève n'est plus «motivé». Le sens de ce qu'il fait lui échappe.

L'action pédagogique consiste à donner des projets à court comme à long terme. Un projet à très court terme doit être cohérent avec le projet personnel plus global de celui qui apprend. Le conseil de « mettre dans sa tête » peut paraître bien dérisoire à un enfant ou un adolescent qui n'a de projet que celui de se sentir vivre et exister.

III

Les canaux de communication

Le respect des modes d'évocation ne suffit pas à assurer une bonne communication. Au-delà de l'image et des mots, il faut quelquefois suivre des détours fort complexes pour aller à la rencontre d'un élève qui semble imperméable à toute intervention directe.

Il y a d'abord les élèves pratiquant une évocation « kinesthésique ». Or, en mathématiques, nous ne pouvons en rester à ce niveau. Les mathématiques s'expriment à travers un langage symbolique. Il faut qu'à partir de ce qui est ressenti se fasse une traduction imagée ou verbale. L'évocation kinesthésique n'est donc qu'une étape sur le chemin conduisant à une évocation mathématique. Cette étape est pourtant essentielle : l'ignorer provoque la rupture du canal de communication. Un ***canal de communication*** est constitué d'une suite de situations déterminées par l'enseignant dans le but d'amener l'élève à se construire une représentation mathématique à travers une chaîne évocative.

Il s'agit de situations où l'on écoute, où l'on lit, où l'on regarde une image fixe, une image mobile, ou une action faite par un autre ou une action faite par soi-même. Certaines de ces situations sont dynamiques (images en mouvement, actions vues, actions accomplies). En mathématiques, transformations, fonctions et déplacements jouent un rôle important. C'est dire l'intérêt de l'évocation des « situations dynamiques ». Or, l'évocation de ces situations est très variable d'un individu à l'autre.

DÉTERMINATION D'UN CANAL DE COMMUNICATION

Pour construire un canal de communication, nous considérerons trois aspects.

1. La nature de la situation externe :
   - écoute ;
   - lecture ;
   - observation d'une image fixe ;
   - observation d'un déplacement ;
   - observation d'une action accomplie par un tiers ;
   - prise de conscience d'une action faite par soi-même.

2. La <u>nature</u> de la représentation interne :

   - dominante visuelle ;
   - dominante auditive ;
   - dominante verbale ;
   - dominante kinesthésique.

3. La <u>fidélité</u> de la représentation interne par rapport à l'événement externe.

L'évocation est fidèle si elle rend compte le plus complètement possible de l'événement externe. Nous dirons alors qu'elle est *conforme*.

L'évocation peut s'éloigner de la situation externe. Nous dirons qu'il y a *élaboration* ou *association.* Il est des domaines où il est intéressant d'avoir des évocations qui éloignent de la situation initiale. C'est rarement le cas en mathématiques.

Nous avons donc trois éléments : la situation, la nature de la représentation interne et la fidélité. En associant les trois éléments, nous pourrons par exemple affirmer que la lecture d'un texte (situation) est traitée auditivement (nature de la représentation) et que le processus est peu efficace (fidélité très faible) ou qu'au contraire la présentation d'une image fixe est traitée visuellement et que la fidélité est grande. Il n'est pas toujours aussi simple de rejoindre un élève dans son évocation, et il faut imaginer des situations plus complexes : pour obtenir une bonne fidélité, il faudra se mettre en scène pour que l'élève imite l'action vue et qu'il raconte ce qu'il vient de faire. Le canal de communication est alors beaucoup plus long.

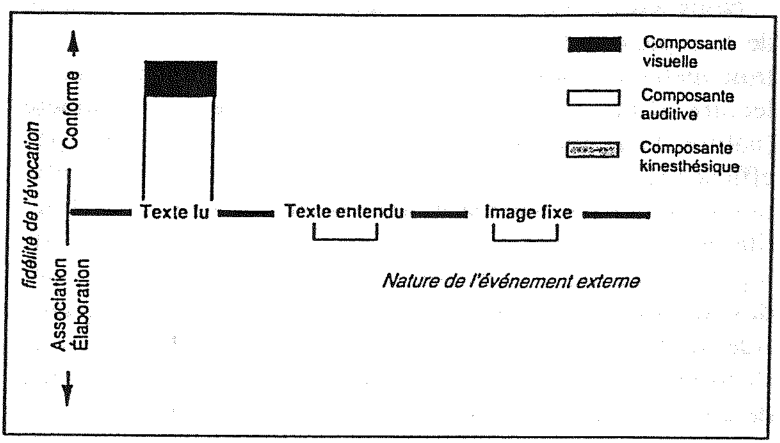
Exemple 1

B. a 9 ans. Il est dans une école où l'on exige beaucoup. Il échoue en mathématiques dès qu'on lui demande de faire le moindre problème.

Il retient peu de choses de ce qu'on lui lit. Il retient fort bien ce qu'il lit lui-même. Il peut se faire des images dans le prolongement des mots en lisant lui-même. Quand il lit, il est fidèle au texte, alors qu'à l'écoute non seulement il garde peu de choses, mais ce sont en outre des éléments interprétés et peu fidèles.

B. élabore en se parlant et c'est ce qu'il fait en classe. Il entend deux mots d'un cours et le voici parti très loin dans son langage intérieur. Il interprète très difficilement une représentation visuelle : il peut la décrire et encore de façon vague, mais ne la rattache à rien d'autre. Il ne semble pas se donner de codage kinesthésique de ce qu'il voit, entend ou lit.

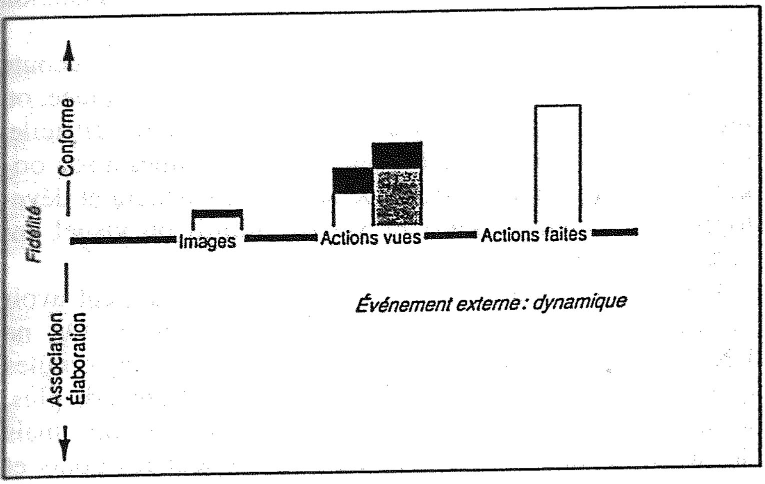
On peut représenter les caractéristiques de B. sur ce schéma.



Horizontalement, on place trois situations constituant un événement de nature différente : la lecture, l'écoute et l'observation d'une image fixe. Le rectangle correspondant indique la fidélité de ce que redonne l'élève par rapport au contenu de ce qui est lu, entendu ou vu. Un rectangle tourné vers le bas correspond à des associations ou une élaboration à partir du texte écouté ou lu, ou de l'image vue. Dans ce cas, il y a transformation du contenu et peu de fidélité.

La couleur du rectangle indique la nature de l'évocation : visuelle, auditive ou verbale, kinesthésique. Quand deux rectangles de couleurs différentes sont superposés, cela veut dire qu'une évocation selon une certaine modalité peut se prolonger en une évocation d'une autre modalité. Par exemple, un individu peut évoquer d'abord verbalement et, dans le prolongement de ces mots, se donner des images. Quand deux rectangles de couleurs différentes sont côte à côte, cela veut dire que l'évocation peut être verbale ou visuelle selon les circonstances.

B. évoque un peu plus facilement le mouvement d'une image, par exemple vue sur un ordinateur, qu'une image statique, mais son évocation reste approximative. En revanche, il évoque fort convenablement les gestes qu'il voit faire et est capable de les refaire et de les nommer. Il a tendance à reproduire physiquement (kinesthésiquement) les gestes vus pour les redonner. Mais il peut décrire, sans avoir à refaire physiquement le mouvement, des gestes qu'il a déjà faits.



Le langage intérieur de B. est surtout de nature verbale, mais il donne l'impression de ne rien comprendre quand on lui parle ; il lit de façon efficace et peut reproduire ce que fait un tiers. On a donc deux canaux de communication privilégiés avec lui : le texte lu et des gestes que l'on fait devant lui. Notons que B. sait reproduire ce que fait quelqu'un, bien qu'il ne se donne à peu près pas d'images visuelles. Pendant qu'il regarde, il se donne une description verbale de ce que l'autre fait avec l'intention de le refaire. Alors que la dominante verbale de B. aurait pu laisser croire à l'importance de lui parler pour qu'il retienne, il n'en est rien.

En fait, il semble bien que ce soit pour des raisons affectives que B. ait coupé certains canaux de communication.

B. est un enfant « effrayé », à qui on a fait peur, soit à la maison, soit à l'école. Les enfants « effrayés » présentent souvent de ces anomalies : auditifs, ils n'écoutent pas ; visuels, ils ne comprennent pas l'image qu'on leur montre. La relation avec l'adulte a été à un certain moment tellement difficile que le contact direct a été rompu. B. ressent la parole de l'adulte comme une agression. Il cède à la panique et ne comprend rien. Le canal de communication est fermé.

Souvent le canal de communication passant par l'écoute se ferme très tôt dès la maternelle ou la première année, ou même avant. Un élève ayant eu une maternelle difficile, rejeté par les autres enfants pour des raisons dues à son origine ou à une caractéristique personnelle, s'isolera et développera un langage intérieur verbal, auditif ou visuel qui sera surtout un moyen d'évasion.

Un enseignant perçu comme agressif, injuste peut avoir la même influence dans les premières années. On ne l'écoute plus. Les enfants parfois se bouchent les oreilles quand ils se font gronder en disant : « Je ne t'entends plus, je ne t'entends plus... » Ils le font aussi, sans le dire, mais de façon beaucoup plus efficace. Ils coupent les ponts et ferment le canal de communication correspondant.

Comment communiquer avec B. ?

On ne peut intervenir directement avec B., même pour lui donner des consignes très simples. Si l'enseignant dit : « Ouvrez vos cahiers, prenez vos livres de mathématiques et ouvrez-le à la page 34 », B. va se sentir submergé par un sentiment de panique, va faire tomber son cahier et ouvrir un livre d'histoire à la page 54. L'enseignant, qui sait que B. n'est pas aussi idiot qu'il n'y paraît, va croire qu'il n'écoute pas ou qu'il le fait exprès.

En écrivant la consigne au tableau, on va déjà aider B. : il évoque beaucoup plus ce qu'il lit. Il évoque aussi ce qu'il voit faire. On peut lui dire : « Regarde ce que font les autres et fais comme eux. » On se rapproche déjà d'un canal de communication plus disponible. Cependant le canal de communication le plus favorable pour B. est celui-ci: «Regarde ce que je fais, fais la même chose et décris ce que tu viens de faire.»

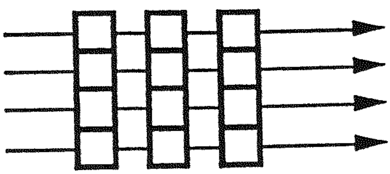
Voici comment expliquer à B. que la division peut être associée à un processus de regroupement ou de partage:

Première étape. J'indique [1] à B. d'observer ce que je fais parce qu'il aura à le reproduire.

Je prends 12 petits cubes que je place sur la table. Je prends 1 cube et je le place à côté du tas. J'en sors un deuxième et je le place à côté du premier cube, j'en place un troisième à côté du deuxième. J'obtiens ainsi un alignement de trois cubes.

Je place ensuite un second cube sur le premier, puis un sur le deuxième, et ainsi de suite jusqu'à ce que les cubes soient répartis en trois colonnes de 4 cubes.

Je demande à B. de refaire la même chose. Je lui demande ensuite de raconter ce qu'il a fait.

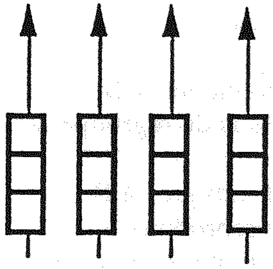


Les cubes sont déposés successivement de gauche à droite.

Deuxième étape. J'enlève les cubes et je replace sur la table le tas des 12 cubes. Je prends 3 cubes et j'en fais une colonne. Je prends 3 autres cubes et j'en fais une autre colonne et ainsi de suite jusqu'à ce que j'aie fait quatre colonnes.

1. La première personne peut être utilisée dans les comptes rendus.

Je demande à B. de refaire la même chose. Je lui demande de raconter ce qu'il a fait.



Les cubes sont déposés successivement de bas en haut pour former des colonnes de 3.

C'est seulement quand B. pourra décrire les deux façons de faire que l'on pourra aller plus loin. On s'assure également que l'action a été mentalement codée avant de poursuivre.

On demande ensuite à B. de donner une représentation de la première action et une autre de la seconde action faite devant lui : ce peut être un dessin, des phrases ou les deux. L'essentiel est que ces deux représentations proviennent de B. lui-même et qu'elles soient bien distinguées.

Puis on écrit devant la première le mot PARTAGER et devant la seconde le mot REGROUPER. On écrit ensuite :

PARTAGER 21 en 3
REGROUPER 21 par 3

et on lui demande de simuler chacune de ces deux actions [2].

On communique toujours indirectement avec B. Le canal de communication le plus favorable est pour lui : action vue, action faite, description verbale de l'action. L'action vue, l'action faite n'ont pour but que de rejoindre son mode d'évocation privilégié, c'est-à-dire le mode verbal.

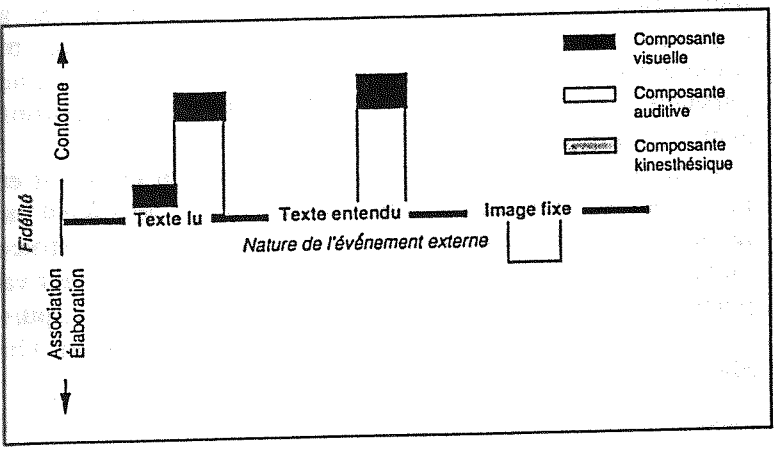
2. Il utilise un ordinateur pour faire cette simulation.

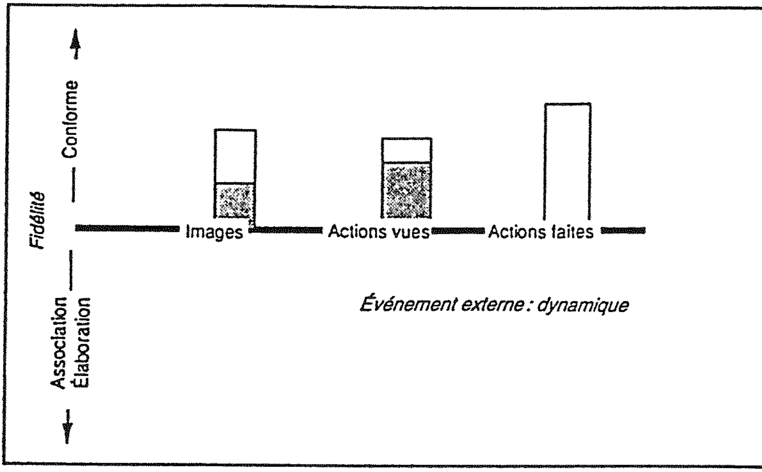
Exemple 2

A., 10 ans, est elle aussi en difficulté en mathématiques. Comme les schémas ci-dessous le montrent, elle évoque surtout verbalement les textes lus et entendus. La lecture conduit à une évocation plus fidèle. A. peut voir certaines images dans le prolongement des mots évoqués. Au moment de redonner un texte lu, elle dit qu'elle voit quelquefois l'image en premier, ce qui explique une composante visuelle sur le premier graphique.

Une image lui fait penser à une autre situation. Elle ne décrit pas tant l'image que la situation analogue à laquelle elle a pensé. Devant une figure géométrique, si la figure géométrique lui fait penser à un éléphant, elle se souviendra que « ça ressemble à un éléphant » et l'image qu'elle produira sera plus près de l'éléphant que de la figure géométrique.

Elle se souvient bien de ce qu'elle fait, moins bien de ce qu'elle voit faire. Elle se souvient de façon auditive du déplacement d'une image et doit s'aider du geste pour se le remémorer. Les mots qui lui permettent la description viennent dans le prolongement de ces gestes. Quand elle regarde quelqu'un faire une action, elle imagine qu'elle fait la même chose et sent les gestes qu'il faut faire. On a donc une part kinesthésique importante.



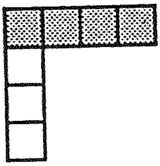


Exemple 3

F. est audi-muet. Il a quatorze ans, mais ne peut faire des additions de nombres de deux chiffres. Il ne maîtrise son langage que très difficilement. Un audi-muet, bien que n'ayant pas de problèmes d'audition, ne parvient à parler qu'avec beaucoup de difficulté. La communication orale est très difficile dans les deux sens. Il ne semble pas vraiment comprendre ce qu'on lui dit et a beaucoup de mal à exprimer ce qu'il veut dire. Il lit avec difficulté. Tout ce qui semble organisation temporelle semble lui échapper et il ne parvient pas à écrire les nombres et à utiliser les opérations arithmétiques.

Pour trouver un chemin de communication entre lui et moi, nous sommes passés par l'ordinateur [3] : Dessin est un langage qui permet de représenter visuellement des structures numériques. Si l'on écrit : « **3 ↑ 4 →** », l'ordinateur va placer successivement 3 carrés les uns sur les autres, puis va en placer 4, d'une autre couleur, horizontalement. On obtient donc :

3. Système Dessin.



Départ

On voit la figure se former à la vitesse que l'on désire. Il faut donc faire un lien entre un codage et un processus de construction d'une figure.

Je commence par taper la commande : **3 ↑ 4 →**.

Je demande alors à F. de se faire une image de ce texte symbolique, ce qu'il parvient à faire en 4 secondes. Si on laisse le texte plus longtemps devant lui, au lieu de le mémoriser mieux, il va vouloir se le parler et tout se passe comme si l'évocation verbale difficile détruisait l'évocation visuelle.

Une fois le texte mémorisé sous forme visuelle, je lui demande de me le réciter : F. commence par dire autre chose, souvent le dernier texte vu avant l'affichage de **3 ↑ 4 →**. Puis en continuant à parler, il finit par dire exactement la commande **3 ↑ 4 →**.

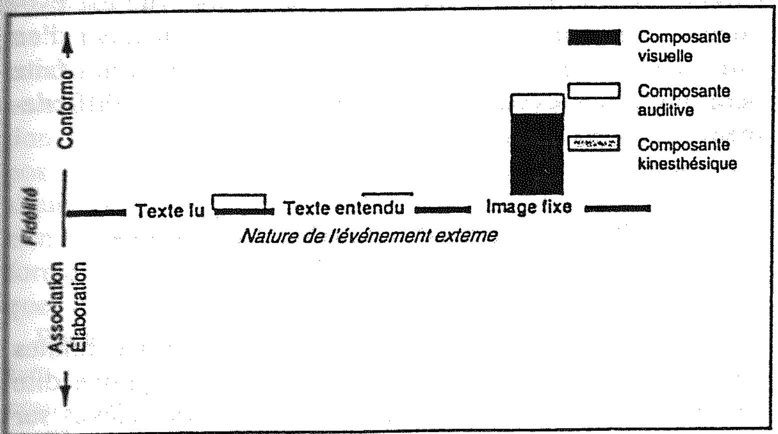
Ce n'est pas possible immédiatement, mais seulement après quatre ou cinq essais. Il a ensuite observé l'empilement des carrés sur l'écran pour le mémoriser, et a pu décrire verbalement son évocation visuelle du déplacement. Enfin, ayant ainsi mémorisé indépendamment la commande et l'empilement des carrés, il a fait le lien entre les deux à partir d'évocations déjà faites.

Ensuite seulement, on demande à F. de prévoir ce que l'ordinateur va faire après avoir évoqué une commande. Il va d'abord tenter de mimer ce que la commande va provoquer sur l'écran. Avec son doigt, il décrit le trajet. Ensuite, F. a toujours pu parfaitement évoquer la commande et prévoir la façon dont l'empilement s'effectue. En utilisant ensuite des commandes plus compliquées associées à diverses représentations de l'addition et de la multiplication, F. est parvenu à gérer le temps à partir du mouvement et du déplacement.

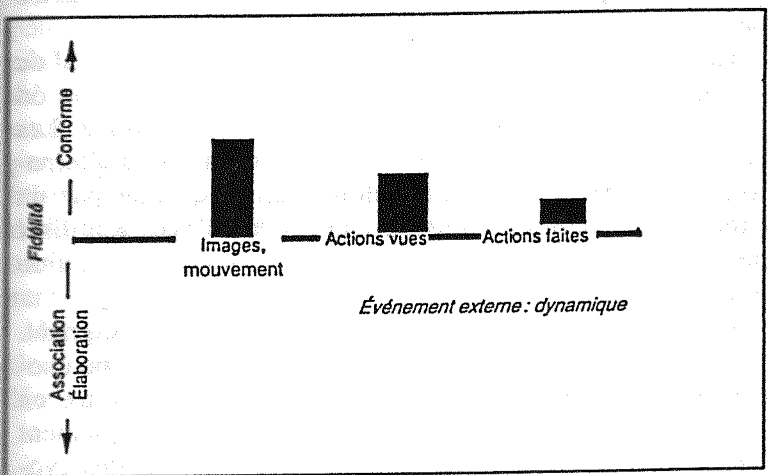
Dans le cas de F., le canal de communication est donc le suivant : évocation visuelle d'un code, puis, en l'absence du code, verbalisation, interprétation du texte sous forme d'une action imaginée, puis mime des déplacements sur l'écran, et enfin vérification. C'est cette séquence qui a permis de le rejoindre. Il faut aussi remarquer dans son cas l'importance de bien distinguer la nature des évocations qu'on lui demande. On commence par lui présenter un texte comme une image et non seulement il faut lui demander d'en faire une évocation visuelle, mais l'empêcher d'en faire une évocation verbale en laissant trop longtemps l'image devant lui, l'évocation verbale venant brouiller l'évocation visuelle. Il faut que l'évocation visuelle soit solide pour que la verbalisation, pénible et incertaine, finisse par aboutir. D'autre part, l'évocation visuelle du mouvement étant très fiable, il faut provoquer cette évocation avant de demander d'en faire un commentaire ou de faire un lien avec une autre évocation.

Cet exemple illustre bien l'importance de la détermination du canal de communication, mais aussi de la nécessité de ne demander un travail de compréhension qu'à partir d'éléments évoqués et non pas à partir d'éléments perçus.

Les graphiques correspondant à F. sont les suivants :



Il garde fort peu de ce qu'il entend ou de ce qu'il lit. L'image fixe peut être évoquée, et même « parlée » dans la mesure où l'image est bien évoquée visuellement. Il faut cependant s'assurer que l'évocation se fait visuellement, toute tentative d'évoquer à la fois verbalement et visuellement conduisant au « brouillage » de l'évocation visuelle.



Le mouvement ou le déplacement d'une image est bien évoqué visuellement seulement. Une action vue est évoquée convenablement aussi à condition de demander d'en faire une évocation strictement visuelle. Une action faite peut aussi être évoquée visuellement, mais plus difficilement.

LES CANAUX DE COMMUNICATION DANS LA CLASSE

Les exemples précédents peuvent paraître des cas limites qui ne concernent qu'une minorité dans une classe dite « normale ». Cependant, quand on interroge des élèves sur ce qu'ils ont conservé d'un cours, on est souvent étonné de la faiblesse de ce qu'ils ont retenu. Malgré leurs efforts sincères, ils ne comprennent pas, ne se souviennent pas et souvent s'ennuient ferme. Pour une bonne part d'entre eux, l'évocation ne se fait pas. Dans bien des cas, non seulement il faut leur permettre d'évoquer selon des modalités qui leur sont propres, mais encore il faut trouver le canal leur permettant d'aboutir à une forme d'évocation génératrice de sens.

En classe, on privilégie naturellement un seul « canal de communication », le plus direct possible : on parle ou on montre, on demande de lire ou de faire un exercice. Les situations sont donc variées, mais n'offrent pas d'alternative. Une information n'est donc véhiculée que par un canal bref et unique. Peut-on amener les élèves à utiliser des canaux différents à l'occasion d'une présentation unique ?

Dans une classe, tout ne peut reposer sur l'enseignant. Une fois que l'élève aura pris conscience de la chaîne évocative qui lui convient, il devra tenter de la mettre en œuvre. La présentation de l'enseignant devra simplement être assez souple pour permettre des situations et des évocations variées.

Une première condition est que les élèves aient un projet d'évocation le plus précis possible et que ce projet soit le leur et corresponde à leur façon d'évoquer. Une seconde condition est de ménager un temps pour l'évocation, et que ce temps soit nettement distingué du moment de la perception. Une troisième condition à remplir est de donner des possibilités d'évocations visuelles, verbales ou kinesthésiques pour le même sujet, et que ces possibilités d'évocation soient bien distinguées. Bien plus, il faut trouver une forme de présentation telle que l'élève soit obligé de pratiquer l'une ou l'autre de ces évocations.

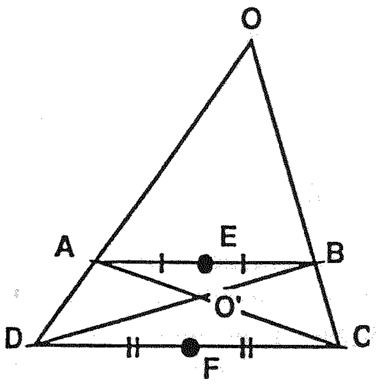
Pour les élèves éprouvant des difficultés plus importantes, il sera nécessaire de travailler avec eux en dehors du cours de mathématiques pour déterminer avec eux la meilleure chaîne évocative possible et en déduire un canal de communication efficace.

Exemple de présentations forçant l'évocation et permettant d'utiliser des canaux de communication différents

Une des premières difficultés que rencontrent les élèves pour faire une démonstration est de prendre conscience du problème : de quoi doit-on partir, quelles sont les hypothèses, que demande-t-on ? Nous avons vu que le rapport entre l'information présentée et l'information intériorisée par les élèves est en général assez faible. Or, si le problème lui-même n'est pas présent mentalement, il est impossible de le comprendre et encore moins de réaliser une démonstration. Il faut donc s'assurer que le problème que l'on présente va bien devenir le problème des élèves.

Nous n'aborderons pas ici la question de la démonstration, mais simplement celle de l'évocation d'un problème. Nous allons donner l'exemple d'une figure géométrique.

Supposons que l'on veuille démontrer la propriété de la figure suivante : les points O, E, O' et F sont alignés.



AB // DC

Phase 1 : observation

On fait la figure sur un transparent et on la place sur le rétroprojecteur. On demande alors aux élèves de la *regarder pour pouvoir ensuite la reproduire en l'absence du modèle.* On laisse environ 15 secondes pour qu'ils puissent l'observer. Les élèves ne doivent rien écrire. On enlève ensuite le modèle et les élèves font la reproduction de la figure sur leur cahier.

Phase 2 : comparaison

Une fois que tout le monde a terminé, les élèves cachent ce qu'ils viennent de faire et on montre à nouveau le modèle sur le rétroprojecteur. Chacun ne fait que l'observer en comparant mentalement le modèle à l'original. On cache de nouveau le modèle et chacun fait les corrections, dans la mesure où cela est nécessaire.

On replace le modèle à la vue de tout le monde. Si certains élèves n'ont pu encore reproduire la figure, ils doivent la reproduire une première fois avec le modèle sous les yeux et la refaire ensuite sans modèle.

Phase 3 : dialogue pédagogique

Une discussion va suivre dans laquelle un certain nombre d'élèves vont expliquer comment ils ont fait pour se souvenir de la figure : est-ce après avoir mentalement décomposé l'image et gardé visuellement chaque partie ? Se sont-ils raconté comment ils feraient pour tracer la figure ? Ou ont-ils fait des relations logiques entre les éléments de la figure en isolant les deux triangles semblables, et en observant que les points E et F étaient les milieux de AB et DC ? Est-il possible de mémoriser la figure sans rien faire de particulier ou au contraire faut-il faire des gestes mentaux particuliers ?

Ces questions, et bien d'autres, peuvent être plus longuement discutées les premières fois que l'on fait ce genre d'exercices. Chaque élève va alors tenter de trouver un moyen personnel de s'approprier la figure. Ensuite, il ne sera pas nécessaire de recommencer intégralement un tel dialogue. Il suffira simplement de rappeler les dialogues passés avant qu'ils tentent de reproduire la figure.

Phase 4 : verbalisation

Ensuite on va demander de décrire par écrit la figure. On peut demander de faire cette description sans regarder la figure, simplement en se servant de ce qu'on a gardé en mémoire. On peut retourner à la figure initiale et comparer. La consigne est la suivante : *décrire la figure de façon à ce que quelqu'un puisse la reproduire simplement à partir du texte.*

Après un peu d'entraînement, cette étape pourra être allégée. La rédaction pourra devenir plus symbolique.

Après que les élèves ont tenté de faire leur propre description, on peut discuter de certaines propriétés de la figure : il s'agit de « lire ce qui est écrit sur la figure ». Il y a bien sûr l'écriture « AB//DC » qui est un élément de langage. On peut donner une expression équivalente à cette écriture en disant : « la figure ABCD est un trapèze ». Mais il y a aussi sur la figure elle-même des éléments de langage : le point E est milieu de AB, le point F est milieu de DC.

Peut-on dire où se trouvent les points O et O'? Le point O se trouve sur l'intersection des droites AD et BC, le point O' se trouve à l'intersection des droites AC et BD.

À partir de là, les élèves peuvent écrire de nouveau une description de la figure.

Dans cette présentation, nous avons tenté de distinguer le moment de la perception et celui de l'évocation. La figure a été observée, dessinée et décrite verbalement. Ce n'est pas parce que nous avons commencé par l'image que certains élèves ne garderont pas avant tout la description verbale, ou la suite des tracés à effectuer pour construire la figure, surtout si dans les premières discussions on a bien mis l'accent sur la diversité des modalités de cette évocation.

D'autre part, les élèves ont toujours un projet précis : d'abord regarder <u>pour</u> se souvenir (phase 1), ensuite regarder <u>pour</u> comparer avec ce qu'on vient de dessiner, enfin décrire <u>pour</u> qu'un autre puisse reproduire la figure à partir du texte.

Au début, cette façon de procéder peut paraître plus longue. Elle l'est en effet, mais elle est beaucoup plus efficace dans la mesure où l'élève sait de quoi on parle. Bien plus, c'est parce que la figure est présente mentalement qu'il pourra chercher et trouver des solutions. Enfin, c'est lui qui a dû traduire ce qui était image dans un langage précis. Faire cette traduction, c'est déjà faire des liens, c'est déjà comprendre.

On aborde enfin deux difficultés : la première est la difficulté que rencontrent certains élèves verbaux de s'approprier des figures géométriques. Ici ils doivent le faire, à partir de ce qu'ils sont, dès le début de l'activité. D'autre part, les élèves visuels ont souvent beaucoup de mal à décrire une figure géométrique. Ici ils doivent le faire avant de commencer la recherche de la solution. Rappelons qu'un élève visuel aura d'autant plus de facilité à décrire verbalement une figure si on lui demande d'abord de la mémoriser visuellement, et si on enlève le modèle pour qu'il doive la décrire à partir de l'évocation seule et non du modèle. Les élèves visuels ont souvent l'impression de « voir » la solution, mais de ne pas savoir « l'expliquer », d'autant plus qu'ils n'en voient pas l'utilité. C'est en général trop tard pour leur demander ce travail de verbalisation : ils ont trouvé, ils veulent passer à autre chose. Si l'on veut qu'ils aient les mots pour parler de la solution qu'ils ont trouvée, il faut qu'ils commencent à mettre en place le vocabulaire dès le début, au moment où ils rencontrent la figure et non à la fin. Il y a une certaine symétrie entre ce qui est intériorisé et ce qui est exprimé. C'est au moment de l'évocation que l'on doit mettre en place les matériaux nécessaires à l'expression.

On note que si une telle présentation prend plus de temps au début, les choses changent très vite. Le temps passé à cette évocation en quatre phases se réduit considérablement et l'habitude contractée à cette occasion n'est autre que la pratique d'un « geste d'observation d'une figure géométrique ».

On peut procéder d'une façon analogue avec un énoncé. Voici par exemple un énoncé extrait d'un livre de seconde[4] :

ABCD est un parallélogramme de centre O. E est un point du segment [AB] distinct de A et B. F est le point du segment [CD] tel que CF = AE. G est un point du segment [AD] distinct de A et D. H est le point du segment [BC] tel que CH = AG.

4. *Transmath*, Nathan. La seconde correspond au secondaire 5 au Québec.

On peut lire cet énoncé en séparant les membres de phrases significatifs et en demandant aux élèves d'écouter pour faire ensuite la représentation géométrique :

ABCD est un parallélogramme de centre O

E est un point du segment [AB] distinct de A et B

F est le point du segment [CD] tel que CF = AE

G est un point du segment [AD] distinct de A et D

H est le point du segment [BC] tel que CH = AG

Ensuite on montre l'énoncé et on demande de vérifier.

Au début, pour faciliter le travail de représentation, on peut énoncer la première phrase : « ABCD est un parallélogramme de centre O. »

Les élèves font la figure.

On lit alors le reste de l'énoncé, phrase par phrase, et les élèves vont placer les points mentalement sur cette figure. Une fois la lecture terminée, ils vont effectivement placer les points sur la figure et comparer ensuite à l'énoncé qu'ils pourront voir.

On poursuit ensuite par quelques observations sur les moyens utilisés pour mémoriser mentalement les points correspondants.

On peut alors poser la question : démontrez que le quadrilatère FGEH est un parallélogramme.

Pour ce qui est des problèmes « narratifs », on peut procéder de la même façon. Le problème est placé sur le rétroprojecteur et l'on passe par les mêmes étapes. Le rétroprojecteur est un outil précieux : il permet non seulement de montrer et de cacher un texte ou une figure, mais il permet aussi de superposer des images ou des textes, de simuler des transformations et des déplacements. Il permet aussi de donner un plan et de s'y rapporter tout au long du cours. L'ordinateur permet de présenter des animations, des transformations et tout l'aspect dynamique que le tableau ne permet pas de rendre.

C'est cependant dans des petits groupes que l'on peut exploiter le plus complètement cette idée de « canal de communication» On peut alors découvrir le «canal» le plus efficace, même s'il est parfois tortueux, et il est alors possible de le suivre.

FAISONS LE POINT

Un canal de communication est constitué par une séquence de situations favorisant une évocation fidèle pour un élève particulier. La lecture, l'écoute, l'observation d'une image fixe ou mobile, l'observation d'une action faite par soi-même ou par un tiers sont les situations constitutives d'un canal de communication. Un élève donné pourra évoquer plus fidèlement s'il voit quelqu'un agir, puis s'il doit refaire cette action et enfin décrire ce qu'il vient de faire. Un autre pourra préférer lire puis agir et enfin décrire sur un schéma ce qu'il vient de faire.

Les situations dynamiques sont souvent des éléments importants d'un canal de communication.

Un canal de communication permet d'isoler les temps de perception et d'évocation.

Certains élèves en difficulté ne peuvent être rejoints que par l'intermédiaire de canaux de communication assez longs, alors que les élèves réussissant facilement à l'école sont rejoints par des canaux de communication plus directs.

IV

Les chemins de l'intuition du sens

Les croyances concernant les mathématiques, les façons de les aborder et de se les approprier, dépendent étroitement des modalités évocatives. On suppose souvent que tout le monde « voit » qu'un segment est égal à un autre, qu'un angle *a* s'obtient en doublant l'angle *b*, qu'une droite tourne autour d'un point. Mais on a de grandes surprises quand les élèves peuvent s'exprimer. Les exemples qui suivent illustrent la dynamique qui s'installe entre la chaîne évocative, les canaux de communications et l'intuition du sens.

LE CAS DE I. : UNE ÉVOCATION KINESTHÉSIQUE ET VERBALE EN RELATION AVEC UNE APPROCHE LOGIQUE ET VERBALE AUX MATHÉMATIQUES

I. est réfugié en France pour des raisons politiques. Il enseignait la philosophie et le latin dans son pays d'origine. Il désire entreprendre des études en sciences.

Écoute du texte

I. traduit plutôt qu'il ne restitue un texte dont il vient d'écouter la lecture. Il ne redonne pas un seul mot du texte lui-même.

Il explique comment il fait pour comprendre : il se met à la place du personnage principal et éprouve ce que le personnage éprouve. Il transforme même l'histoire entendue à travers ce qu'il a pu vivre : « Je procède toujours de cette façon, dit-il. J'ai toujours besoin de placer ce que je lis ou ce qu'on me dit dans un contexte que je connais sinon je ne comprends rien. » Mais alors il arrive à I. que le contexte prenne complètement le pas sur ce qu'il lit, et il fait alors d'importants contresens. Les mots lui paraissent importants, il les choisit avec soin.

Reproduction du dessin

L'épreuve de la reproduction d'un dessin est désastreuse. Il n'en donne qu'une image très lointaine. La reproduction à vue est même très difficile.

D'une façon générale, il n'arrive pas à décrire un objet concret et encore moins à le visualiser. « Pour que je me souviennne de quelque chose de concret, il faut que l'objet soit chargé affectivement. » Quand il tente de mémoriser un schéma, il s'en fait une description sommaire, mais ne vérifie jamais si cette description est suffisante. Par contre, il se souvient très bien des corrections qu'il fait lui-même sur le dessin. Il ne sait pas commenter un dessin. Comme il n'arrive pas à l'évoquer, il ne sait pas non plus l'interpréter.

Interprétation

La chaîne évocative de I. part du kinesthésique pour se terminer au niveau verbal. Il a un discours intérieur très cohérent, mais sans lien avec les objets concrets, réels ou représentés. La réalité est constituée de ce qu'il ressent ou de ce qu'il a ressenti, des mots et des règles. Pour faire des mathématiques, il possède un raisonnement logique, mais il n'a pas les éléments concrets sur lesquels il pourrait l'appliquer.

Il se donne pourtant beaucoup d'images, mais ces images ne sont jamais des représentations d'objets ou de schémas. Elles sont le fruit de son imagination. À la suite des mots, des images viennent aussi, en arrière-plan.

Autant il est capable de dérouler un raisonnement logique qu'il construit lui-même, autant il lui est difficile de se soumettre à une discipline extérieure : il va d'abord la contester. Il tend à refuser la réalité quand elle prend la forme de l'image, du concret, de la rigueur extérieure. Il accepte les mots quand ils sont définis soigneusement, les règles quand elles concernent la grammaire, et la rigueur logique quand il l'élabore.

L'approche des mathématiques

Partir des mots et des définitions, faire des liens verbaux, rattacher l'élément nouveau à ce qui est familier et retourner à l'objet concret

Pour commencer à faire des mathématiques, on pourra commencer par lui donner des définitions précises. Chaque mot sera défini non seulement mathématiquement, mais aussi en relation avec d'autres mots tirés d'un vocabulaire qui ne sera pas forcément mathématique.

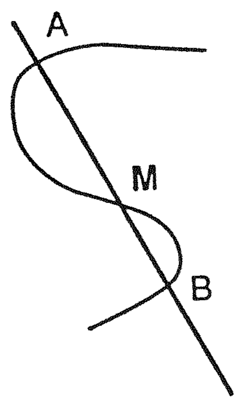
Par exemple, après avoir défini une courbe tangente à une autre, il a cherché le lien entre la tangente mathématique et l'expression « c'est tangible » : ce qui est « intangible » ne peut être touché, et donc doit demeurer intact. Une courbe tangente à une autre la « touche » en un seul point. La définition mathématique du mot tangente va se trouver liée dans son esprit à un mot peu courant pour la plupart mais familier pour lui : intangible.

Ce lien tout personnel va contribuer à donner son sens au terme mathématique. Mais il a tendance à en rester à ce niveau, alors qu'il lui faut retourner à l'aspect concret des figures. Il devra apprendre à regarder, donc à reproduire des figures géométriques avant de les analyser. Ce travail de reproduction, dans bien des cas, devra être mené de façon systématique.

Apprendre à se représenter des mouvements, des transformations

Toujours à propos de la tangente, on lui demande d'imaginer une courbe (c) coupée en A, B et M par une droite (voir la figure suivante), et ensuite d'imaginer que la droite tourne autour du point M. Que deviennent alors les points A et B ?

Pour répondre à cette question, il suffit d'imaginer la rotation de la droite autour de M. On « voit » alors que les points A et B se déplacent sur la courbe et qu'ils peuvent se confondre avec M.



Curieusement, I. dit que « ça tourne trop vite » et qu'il ne peut répondre. Il a fallu qu'il prenne une règle pour simuler le déplacement de la droite et pour accepter que les points A et B peuvent se confondre avec M pour une certaine position de la droite. Après avoir fait la simulation de la rotation avec la règle, il a longuement regardé la figure, jusqu'à ce qu'il ait pu reconstituer mentalement le mouvement. I. dit n'avoir jamais fait ce genre de travail mental. Or, c'est le genre de choses qui semblent aller de soi pour un enseignant de mathématiques.

Nous avons continué à lui donner des définitions verbales d'objets géométriques. Il devait tenter aussitôt de construire un lien entre cette définition et d'autres mots de son vocabulaire, vocabulaire relié bien souvent à son passé de philosophe. Cela étant fait, il devait ensuite faire le lien entre ces définitions mathématiques et les représentations géométriques, et expliquer comment on retrouvait dans la configuration géométrique le sens des définitions. Ainsi, on partait de la définition mathématique qui était donnée, il devait ensuite rechercher dans ce qu'il connaissait bien, c'est-à-dire le vocabulaire, des associations et des analogies avec les nouveaux mots et, ensuite seulement, il devait établir le lien entre la définition et la configuration géométrique. La définition verbale devenait ainsi un moyen d'évoquer la réalité géométrique. Autrement dit, il « voit » à condition d'avoir « dit » avant. Le canal de communication est donc :

1. définition uniquement verbale ;
2. lien entre la définition et le vocabulaire de I. ;
3. projection de la définition dans la configuration géométrique.

On a pu aussi utiliser la composante kinesthésique qui est souvent la première dans la chaîne évocatrice utilisée par I. En géométrie, on a commencé par faire devant lui des constructions et lui demander de les reproduire. Quand la construction était trop compliquée, il la faisait en même temps. Ensuite, il commentait ce qu'il venait de faire. Au moment du commentaire, le sens de ce qu'il venait de faire surgissait (passage du « senti » au « dit »). Les progrès de I. furent très rapides.

Voici un autre cas très significatif de cette obligation de « dire et nommer » pour finir par « voir ».

R., OU L'ABSENCE APPARENTE D'ÉVOCATION

La dernière classe régulière que R. a suivie était une troisième spéciale. Elle a été TUC[1] un an dans le domaine de la cuisine. Elle voudrait entreprendre une formation « d'opératrice de saisies ». Elle n'a aucun goût pour les mathématiques et a eu des difficultés depuis le début de sa scolarité.

Écoute du texte

Il ne lui reste qu'un seul mot après l'écoute du texte : sable. Même après une seconde lecture, il ne reste rien. Elle se souvient de quelques mots supplémentaires en lisant elle-même le texte.

Elle ne se souvient pas non plus des films qu'elle voit. Elle est incapable d'expliquer ou de décrire comment aller de chez elle à son lieu de travail. Elle prend l'autobus et compte les arrêts pour savoir où descendre. Elle dit que si on la laissait au centre de Toulouse, elle ne pourrait retrouver seule son chemin.

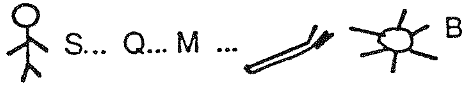
Elle se dit les mots avant de les écrire, ce qui laisse penser à une amorce de gestion auditive. Ce sera confirmé plus tard en lui demandant de faire mentalement des calculs simples : pour faire $12 + 2$, elle fait d'abord $10 + 2$ puis $2 + 2$ et fait la somme ensuite. Cette façon de procéder est souvent privilégiée pour les « auditifs » qui calculent sans poser l'opération, mais en décomposant les nombres pour n'avoir à faire que des calculs simples.

Elle ne retient à peu près rien d'un dessin simplement en l'observant. En revanche, elle garde un souvenir qui lui permet de reconstituer une partie du graphique en le faisant d'abord elle-même. Ce ne sont pas les gestes qui lui restent, mais plutôt une certaine forme de commentaire.

1. Stage peu rémunéré de durée limitée.

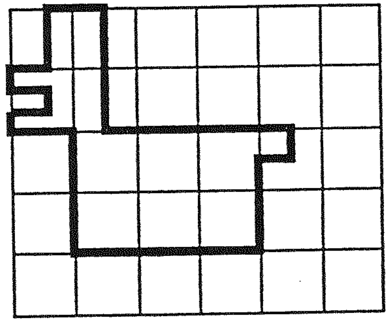
R. est une personne très agréable, très vivante, contrairement en général à ceux qui évoquent peu et dégagent souvent une impression fermée et immobile. R. doit déployer souvent des trésors d'astuces pour surmonter cette absence à peu près complète d'évocation. Bien sûr, elle s'ennuyait beaucoup à l'école puisqu'elle n'y faisait rien, au moins mentalement.

Nous avons essayé de trouver quelques moyens d'améliorer son évocation à l'écoute. On lui a suggéré d'écouter le texte en faisant un petit dessin très schématique correspondant à chaque membre de phrase significatif. Elle a fait cette suite de signes :

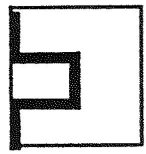


Ensuite en regardant cette suite de signes, elle dit qu'un bonhomme marche, qu'il est salué, qu'il marche le long d'un canal et qu'il rencontre des maraîchers qui vendent des légumes. Il y a du soleil et il fait beau. Ainsi, le fait d'avoir représenté chaque membre de phrases par un symbole l'oblige à une certaine évocation et lui permet de retrouver une partie du sens de la phrase. Il faut noter cependant qu'elle doit garder ces signes devant elle et ne peut s'en passer.

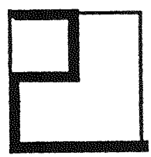
Nous avons fait un certain nombre d'exercices visant à améliorer ses capacités d'évocation. À cette occasion, nous avons remarqué cette figure :



Ce dessin comporte ce motif :



La difficulté provient du fait que le trait ne correspond pas aux lignes du quadrillage. Le tracé doit se faire au tiers d'un carreau. Or, R. était incapable non seulement de faire de mémoire cette partie du dessin, mais encore de le reproduire à vue. Voici ce qu'elle a fait :



Elle place son tracé au milieu du carreau et non au tiers. Elle a fait plusieurs essais, sans succès. Rappelons qu'elle fait le dessin avec le modèle sous les yeux.

Nous avons abandonné ce travail pour faire simplement du calcul, et en particulier nous avons appris à calculer « un tiers d'un nombre ». R. a appris à faire ce calcul mentalement.

Nous sommes ensuite revenus au dessin. R. a réussi du premier coup à reproduire cette partie du dessin. Autrement dit, à partir du moment où elle a pu faire le calcul du tiers d'une quantité, elle a pu « voir » un partage en trois du carreau. On lui a ainsi donné la possibilité d'évoquer verbalement le dessin en donnant un sens à l'expression « prendre le tiers de... ». On croit souvent que l'image va faciliter l'appropriation d'une idée. Dans le cas de R., c'est exactement le contraire qui s'est produit. Ayant acquis la capacité de faire le calcul, elle a pu voir, ou plutôt évoquer, la représentation géométrique.

Nous avons ensuite systématiquement appris à faire des calculs en relation avec les expressions « une fois et demie » une grandeur, le quart, le tiers, les trois quarts, etc. Ensuite elle a pu reproduire beaucoup plus facilement les schémas.

Le cas de R. est un cas limite. On rencontre peu d'individus ne pratiquant à peu près aucune évocation. Cependant, son incapacité à « voir » directement une figure géométrique et la possibilité d'évoquer visuellement le même dessin après avoir appris à faire un calcul semblent bien de la même nature que ce que nous dit I. : il faut lui donner d'abord une définition verbale des objets géométriques, faire des liens verbaux avec d'autres éléments de nature verbale et ensuite alller vers la figure géométrique pour l'interpréter.

DAL., OU LA NÉCESSITÉ DU FORMALISME

Dal. a abandonné l'école depuis 3 ans. La dernière classe suivie est une quatrième CPPM [2]. En classe, elle paraît complètement fermée, ne participe pas au cours de maths et donne l'impression de ne rien comprendre. Elle apparaît comme une véritable auditive. Elle a une très bonne capacité d'observation, puisqu'elle réussit du premier coup à reproduire exactement le schéma. Pour effectuer cette reproduction, elle n'utilise que des moyens verbaux. Elle se souvient de la description très précise de l'image qu'elle s'est donnée au moment de l'observation.

Elle dit ne rien comprendre aux nombres entiers relatifs (nombres entiers de signe quelconque). Je reprends des explications données en classe: analogie des nombres négatifs avec les températures négatives, avec les façons de repérer les sous-sols dans les ascenseurs, etc. Je reviens ensuite sur la droite numérique et lui rappelle comment les

2. Secteur « professionnel court » au Québec.

nombres entiers relatifs sont placés. Elle refuse toutes ces analogies, toutes ces représentations. Elle me dit finalement que ça n'a pas de sens, puisqu'un nombre sert à compter et qu'on n'a jamais pu rien compter avec -3, que tout cela est absurde. Elle est même franchement en colère et a l'impression qu'on se moque d'elle.

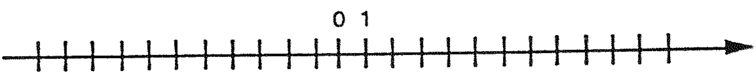
Je me rends compte que Dal. vit dans un univers qu'elle structure logiquement et avec beaucoup de cohérence. Tout doit avoir une explication. Ce qui n'est pas structuré logiquement n'a pas de sens.

Je lui demande ensuite de trouver une solution $2 + ? = 5$, ce qu'elle trouve sans difficultés, puis je lui demande de trouver la solution de l'équation $7 + ? = 5$. « Il n'y a rien », répond-elle.

Je lui dis qu'on a décidé « d'inventer » des nombres qui seraient les solutions de ces équations. La solution de l'équation précédente sera noté $^{-}2$.

Elle accepte parfaitement cette notation. Je continue à lui présenter des équations du même type. Nous cherchons ensuite des équations dont $^{-}2$ serait solution. Ensuite nous cherchons à résoudre des équations de la forme $5 + ? = 0$, de forme générale $a + ? = 0$ $(a \in \mathbb{N})$. Nous notons ces nombres ^{-}a.

Ensuite je lui demande comment placer ces nombres sur une droite graduée.



Elle complète la graduation en plaçant d'abord les nombres entiers naturels, puis elle placera les nouveaux nombres, qu'elle notera en plaçant soigneusement le signe - au-dessus et non à côté ($^{-}1$, $^{-}2$, $^{-}3$ ...).

Ensuite, je lui ai dit que ces nombres ne servaient pas à compter, mais beaucoup plus à repérer. Autrement dit, j'ai utilisé avec elle une présentation particulièrement formelle des nombres négatifs, sans référence à quoi que ce soit de

« concret ». Nous avons ensuite continué à travailler dans ce sens sur les fractions, à partir du formalisme et en n'introduisant qu'ensuite les exemples concrets.

Non seulement les progrès de Dal. furent rapides, mais son attitude en classe fut transformée. Son professeur de mathématiques fut avertie de l'importance d'une présentation d'abord formelle s'appuyant sur des nécessités logiques. Elle est devenue plus ouverte et participait beaucoup plus à la classe. Or, Dal. avait été placée dans des classes faibles, où l'on privilégiait une présentation très concrète des mathématiques. Cette présentation « concrète » non seulement ne l'aidait pas, mais lui interdisait tout progrès et était largement responsable de son échec. De plus Dal. était particulièrement volontaire et comme on ne répondait pas à ses questions comme elle se les posait, elle s'était forgé une attitude têtue de retrait, ce qui correspond à un trait particulier de son caractère.

Dal., essentiellement verbale, fondait sa compréhension sur une logique rigoureuse. Le canal de communication qu'il nous fallait utiliser devait partir d'une introduction mettant en évidence une structure logique. Ensuite, elle pouvait aller vers des objets plus concrets. Comparons Dal. à Fred, visuel et concret, qui tire son exigence de cohérence des représentations spatiales.

LE CAS DE FRED, VISUEL ET CONCRET

La dernière classe suivie par Fred est une troisième dans un LEP [3]. Il voudrait passer un CAP.

Il donne du sens à partir d'images visuelles fixes, auxquelles il est toujours extérieur. L'image étant présente, il trouve facilement les mots pour la décrire. Il ne s'intéresse qu'à ce qui lui est utile, ce qui n'est pas le cas, pense-t-il,

3. CEGEP, option professionnelle au Québec.

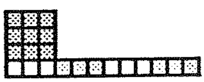
de l'algèbre ni des nombres négatifs. Il n'en retient donc rien. Il est capable de démonter et de remonter rapidement son moteur de mobylette dont il voit facilement toutes les pièces. Il n'a jamais rien compris aux fractions, bien qu'il lui semble que « ça devrait lui servir dans son CAP ».

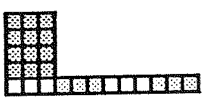
Voici la représentation imagée que je lui donne de « $\frac{1}{3}$ de 12 ». En fait, cette représentation est produite par un ordinateur et les parties ombrées sont en réalité colorées.

$\frac{1}{3}$ de 12  (Schéma 1.)

Je lui donne ensuite les représentations suivantes associées à $\frac{2}{3}$ de 12, $\frac{3}{3}$ de 12, $\frac{4}{3}$ de 12 :

$\frac{2}{3}$ de 12 

$\frac{3}{3}$ de 12 

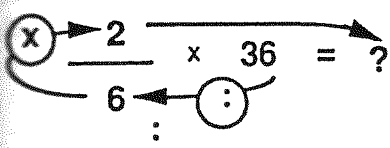
$\frac{4}{3}$ de 12 

Toutes ces images se trouvent en même temps sur l'écran et je lui demande de m'expliquer ce qui se passe : où voit-on le 12, le dénominateur de fraction (le 3), le numérateur ? Comment peut-on prévoir le schéma correspondant à $\frac{7}{3}$ de 12 ?

Il regarde longuement l'ensemble des schémas et, au bout de 3 minutes d'observation silencieuse, me dit : « Ça y est ! » et il décrit ce que l'ordinateur va construire en relation avec $\frac{7}{3}$ de 12. Il tente de faire les mêmes prévisions avec d'autres nombres.

Ensuite, je lui demande de calculer de tête $\frac{7}{5}$ de 20, puis de faire d'autres calculs de même nature. Il répond lentement et de façon toujours exacte à la question posée. Il se donne d'abord le schéma géométrique correspondant avant de répondre.

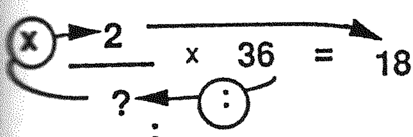
Je lui présente ensuite cette image :



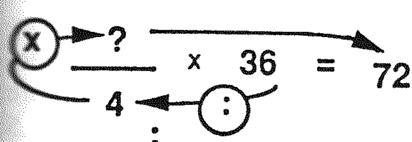
(Schéma 2.)

Et je lui demande de l'interpréter en fonction de ce qu'il vient de faire. Là encore, la réponse ne sera pas immédiate et semblera surgir soudainement : On divise par 6 et on multiplie par 2.

Ensuite, nous avons déplacé le « ? » :



ou encore :



Pendant plusieurs séances, il se donnait d'abord la première construction qui lui servait à interpréter le schéma. Ensuite, il a formulé la règle de calcul à partir du schéma 2.

Nous continuerons de cette façon, en présentant un schéma et en lui demandant de l'interpréter lui-même en fonction de ce qu'il sait déjà. Nous avons travaillé de cette façon avec succès les fractions équivalentes, les sommes de fractions. Il était très concentré pendant toutes les séances, parce que, disait-il, voyait quelque chose et qu'il comprenait. Le schéma 1 lui avait donné accès à une structure logique extraite d'une représentation spatiale, comme la définition formelle l'avait fait pour Dal. Remarquons que les schémas fournis à Fred ne sont pas plus concrets que les définitions données à Dal., mais qu'ils donnent dans les deux cas des représentations sur lesquelles aussi bien Dal. que Fred peuvent appuyer une démarche cohérente.

CAS DE L., OU COMMENT DONNER DU SENS À L'ACTIVITÉ ET AUX RÈGLES MATHÉMATIQUES

De niveau troisième, il désire devenir éducateur sportif. À partir de la quatrième, il s'est trouvé en sérieuse difficulté en mathématiques ; pourtant la matière ne lui déplaît pas *a priori*. Il est en très sérieuse difficulté.

Écoute du texte

Spontanément, il ne se fait pas d'images, mais il se « force à le faire pour comprendre ». À la deuxième lecture, il redonne une grande partie du texte en utilisant très souvent les mots du texte ; par exemple : « Il revivait maintenant trop souvent des moments révolus de son propre passé. » Par contre, il ignore complètement les parties 5 et 6.

Il se redit les mots et tente de se faire une image. N'ayant pas réussi dans ces cas-là, le texte a été simplement écarté.

L. part de ce qui est concret et comprend avant tout à partir de l'image. Il a cependant une composante kinesthésique importante.

Il a des mathématiques une idée assez rigide : des règles à appliquer, c'est tout. Ces règles n'ont pour lui à peu près ni sens, ni justification, ni liaison avec quoi que ce soit de concret. Qu'il puisse y avoir une raison que chacun peut comprendre qui justifie ces règles lui semble une idée farfelue. Il fait tous les calculs de façon mécanique. Il applique des formules. À une question comme « qu'est-ce que π ? », il pense qu'il ne peut y avoir d'autre réponse que « c'est 3,14 ». Il ne lui semble pas qu'on lui ait jamais dit que π représente le rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre. Il est prêt par contre à appliquer la formule $C = \pi \times D$ (C représente la longueur de la circonférence, D le diamètre du cercle). Il ne fait pas non plus le lien entre la formule écrite sous cette forme et la phrase « π *représente le rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre* », alors qu'il s'agit de deux façons différentes d'exprimer la même chose.

Quand L. pratique le canoë, il a conscience d'un travail mental très précis. Il regarde à une certaine distance en avant et évalue constamment l'allure des courants et des tourbillons. Il évalue l'angle du courant et des rochers et place en conséquence son canoë. « Je vois très bien ce que je dois faire. Je dois tout le temps prévoir la position du canoë par rapport au courant », et il décrit avec beaucoup de détails le travail mental qu'il effectue. Ce travail « intellectuel » est un de ses grands plaisirs. En canoë, il doit anticiper à partir d'une réalité qui lui est familière. En mathématiques, il n'y a pas de réalité et il n'y a pas d'anticipation possible : il faut suivre, suivre des règles, des formules, des consignes, c'est tout. Je lui explique :

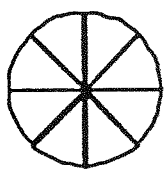
« Celui qui fait des mathématiques agit beaucoup plus comme toi quand tu fais du canoë, que lorsque tu fais des maths : il faut justement savoir où l'on va, anticiper avant de faire un calcul. Les mathématiques aussi partent d'une réalité familière. Mais il y a un langage précis en mathématiques qui permet de parler simplement de certains aspects trop compliqués de cette réalité. »

L'idée qu'on puisse en mathématiques aussi « diriger sa barque », savoir où l'on va parce que le terrain est familier ne lui paraît pas très sérieuse. Pourtant son attitude changera et il dira lui-même que cette prise de conscience l'a beaucoup aidé.

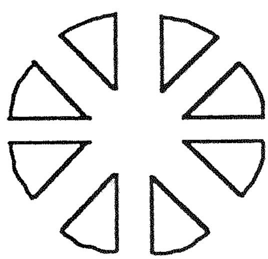
Pour continuer la discussion avec lui, nous sommes partis de la formule donnant l'aire du cercle ; après quelques tâtonnements, il finit par me donner :

$$\text{Aire du cercle} = \pi \times r^2$$

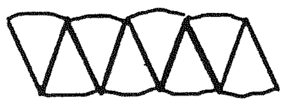
Je dessine un cercle et trace des rayons :



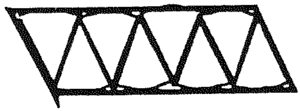
Avec des ciseaux, je coupe les portions de cercle :



Je les dispose ensuite de cette façon :



On trace ensuite un parallélogramme « entourant » la figure précédente :



« Peut-on évaluer à peu près l'aire du parallélogramme ? »

La base mesure « à peu près » la moitié de la circonférence du cercle, soit à peu près $\pi \times r$.

La hauteur du parallélogramme mesure « à peu près » r.

L'aire du parallélogramme mesure « à peu près » $\pi \times r^2$.

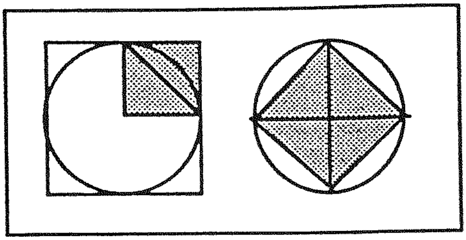
« Et si on partageait le cercle en portions plus petites ? Est-ce que l'approximation serait meilleure ? » Il lui semble en effet que ce serait un peu meilleur.

« Est-ce que c'est convaincant ? » Il dirait plutôt que c'est étonnant et intéressant, mais pas très sérieux du point de vue mathématique. Il dit aussi qu'il s'en souviendra.

Je lui demande de préciser ce dont il se souviendra : c'est du processus qui consiste à couper le cercle et à réorganiser les portions de cercle entre elles. Il s'agit bien de la transformation et non pas simplement de l'image finale dont il va garder le souvenir.

Ce travail fait avec L. a eu une grande importance pour lui. Il a recommencé à faire des mathématiques. Rendu attentif à son fonctionnement mental par des cours de méthodologie, il a pu entrer ensuite en classe de seconde sans difficulté, alors qu'il voulait quitter l'école.

Un élève visuel préférerait cette image :



Sur la figure de gauche, il voit que l'aire du cercle est inférieure à 4 carrés ombrés, et sur la figure de droite qu'elle est supérieure à 2 carrés. Or un carré vaut r^2, donc est compris entre 2 r^2 et 4 r^2. Ici il n'y a pas d'action, mais simplement un état de fait. On voit l'encadrement. Dans la situation précédente, c'est une suite de transformations qui donnait une approximation du résultat.

Aucune des deux illustrations ne constitue une preuve de la formule. L. a raison de dire que du point de vue mathématique, ce n'est pas très sérieux puisqu'on ne peut établir la formule dans aucun des deux cas. C'est pourtant beaucoup plus mathématique qu'il ne le croit. Dans le premier cas, le problème posé est celui du passage à la limite quand les portions de cercle deviennent très petites : est-ce que la limite est bien ce parallélogramme ? Ce problème est un problème mathématique important pour lequel il faudra développer des outils conceptuels qui sont à la base de l'analyse. Le second pose le même problème d'une façon différente : il s'agit de se rapprocher de l'aire du cercle en l'encadrant par des polygones que l'on peut placer à l'intérieur du cercle ou au contraire en le recouvrant. Là encore se posera le problème du passage à la limite.

Dans les deux cas, nous sommes au cœur de l'activité mathématique, à condition que l'élève ne considère ni la manipulation ni le dessin comme une preuve, mais comme un moyen de réfléchir, de se poser un problème, de développer un langage et de donner un sens à une formule établie formellement ailleurs.

Au lieu de se retrouver dans le monde de l'arbitraire soumis aux décrets des formules, on tente de se placer dans un univers dans lequel on peut faire des liens avec ce qu'on connaît ou dans lequel on peut agir. Comme les dessins ou l'action, les rappels historiques ont aussi leur importance ; savoir que 2000 ans avant J.C. en Égypte comme en Mésopotamie, on cherchait déjà à calculer « un champ rond », et qu'on faisait ce calcul en triplant le diamètre, en élevant ensuite au carré et en divisant par 12, puis qu'on a commencé à faire des approximations par les polygones en Inde, au VIe siècle après J.C., et qu'il a fallu attendre le XVIIIe siècle pour qu'on exprime la surface du cercle comme on le fait aujourd'hui, en donnant une approximation de π par des méthodes analytiques, permet d'admettre à la fois qu'il y ait quelque chose qui puisse encore échapper dans la compréhension de cette formule, mais qu'elle est le résultat de tâtonnements et d'efforts qui ont duré plusieurs millénaires. Tout cela arrime la formule mathématique, par l'image, par l'action et par l'histoire au contexte culturel, donc au sens.

A. ET LE BESOIN DE SE PLACER DANS LA FIGURE GÉOMÉTRIQUE POUR LUI PRÊTER VIE

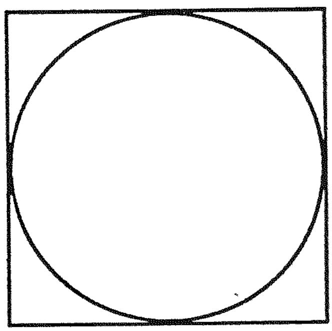
A. est de niveau de seconde. Elle désire faire un bac B et plus tard une école de commerce.

Elle se souvient de phrases entières d'un texte lu. Les mots lui reviennent, mais ce n'est pas ma voix qu'elle entend, c'est la sienne. Elle a appris à se faire des images dans le prolongement des mots entendus et elle pense que ce travail l'a beaucoup aidée à fixer son attention. Elle a donc donné une importance nouvelle aux images visuelles qu'elle se donne. Elle fait des exercices de gestion mentale depuis au moins six mois maintenant.

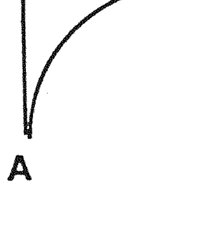
Elle reproduit une figure géométrique assez approximativement, à partir de la description qu'elle se donne. Elle n'aime pas la géométrie et ne réussit pas dans ce domaine.

A. est à dominante auditive et verbale.

Au cours du travail que nous faisons ensemble, je suis amené à lui demander de comparer la longueur du tour du carré et du tour du disque sur la figure suivante :

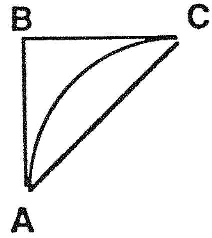


Elle ne sait pas. Je lui montre ensuite cette figure et lui demande de comparer ABC à l'arc AC.



Elle pense que les deux longueurs sont « probablement » les mêmes.

Je rajoute alors le segment [AC] et lui demande de comparer ABC, l'arc AC et le segment [AC]. Même hésitation.



Je lui demande ensuite de s'imaginer en A et qu'elle doive aller en C. Quel chemin devrait-elle suivre ? La réponse est immédiate : le segment [AC].

Je lui demande ensuite d'imaginer qu'elle peut se déplacer sur l'arc AC ou sur ABC. Je lui repose encore la question de la comparaison des longueurs. Elle prend un certain temps pour réfléchir et me dit cette fois que l'arc AC est plus court que le chemin ABC.

Nous revenons ensuite au cercle inscrit dans le carré : elle « voit » maintenant que la longueur de la circonférence est inférieure à quatre diamètres.

On peut dire que A. n'a aucune intuition des figures géométriques, ce qui veut dire pour elle qu'elle ne les a jamais explorées à travers l'aspect temporel. Elle peut imaginer qu'elle se déplace, que quelqu'un d'autre se déplace. Elle peut imaginer aussi qu'elle transforme certaines courbes en les tordant par exemple, mais elle n'a jamais fait ce travail mentalement et la géométrie lui est restée complètement étrangère.

Il est étonnant, pour un professeur de mathématiques, de voir à quel point « l'intuition », ou même le simple « bon sens » n'opère plus en cours de mathématiques. Un cas comme celui-ci n'est pas isolé. Il est au contraire très représentatif d'élèves en difficulté. A. est une personne intelligente qui est d'ailleurs parvenue à entrer dans une classe de première tout à fait normale l'année suivante. Pourtant, il y a une véritable rééducation à faire en géométrie. Cette rééducation peut consister d'abord à lui faire mémoriser et construire des figures géométriques pour qu'elle commence à établir des relations quantitatives entre les divers éléments. Ensuite il faudra qu'elle pénètre ces figures géométriques en imaginant des transformations, qu'elle les compare en imaginant qu'elle les parcourt. A. a les moyens de donner un sens aux figures géométriques en procédant de cette façon. Elle n'avait tout simplement jamais fait un tel travail.

CAS DE CH., OU L'ÉVOCATION MOSAÏQUE ET LA DIFFICULTÉ DE FAIRE DES LIENS

Ch., d'origine chilienne, est en France depuis 6 ans. Il suit un stage de « remise à niveau » de niveau première[4] pour pouvoir faire ensuite des stages en informatique.

Écoute du texte

Après l'écoute, il redonne le texte sous la forme d'une suite de descriptions assez précises, mais sans tenir compte de l'ordre chronologique : « Les images se présentent comme une mosaïque sur un mur. » Elles apparaissent avec assez de précision pour pouvoir les commenter, mais la relation entre elles est perdue : « Je vois un château, une porte se lève, un pont-levis. Les gardes le saluent et il quitta la ville. » Les mots reviennent facilement sur ces images. La vision de la mer arrive ensuite bien qu'elle n'apparaisse qu'à la fin du texte. Ensuite, il a la vision de l'abeille, puis celle des maraîchers qui « sortent à cheval de la ville (?) ».

4. Deuxième année de CEGEP au Québec.

Après une deuxième lecture pendant laquelle Ch. a le temps de faire des évocations auditives qui consistent à décrire les liens entre les images qu'il se donne, il est capable de donner la plus grande partie du texte dans l'ordre. Cependant, les parties 7 et 8 sont complètement ignorées. L'expression des sentiments ou des notations plus abstraites sont ainsi passées sous silence.

Interprétation

L'image joue un rôle très important dans sa vie : avant de s'endormir par exemple, il se fait un film très coloré. Il éprouve alors un sentiment très agréable. D'une façon générale, Ch. a beaucoup d'imagination, mais on retrouve toujours dans ses productions ce côté morcelé. En dessin, il juxtapose des formes différentes, isolées, ce qui donne une impression d'éclatement. Quand il rédige un texte, ses idées lui viennent aussi de cette façon désordonnée, sans lien.

En mathématiques, au Chili, il obtenait de très bons résultats. Il suivait là-bas des programmes très proches des programmes américains, beaucoup plus morcelés que les programmes français, portant surtout sur l'algèbre et où la démonstration tient une part négligeable. Il a eu beaucoup de difficulté à s'adapter aux programmes français dans lesquels algèbre et géométrie sont beaucoup plus imbriqués et dans lesquels le raisonnement et la démonstration jouent un rôle beaucoup plus important. Dans ces programmes, il faut faire des liens.

Intervention sur l'évocation pour améliorer la compréhension en mathématiques

Nous avons ensemble trouvé une méthode plus efficace d'évoquer les textes : il ferait une première lecture qui lui laisserait des traces visuelles. Il ferait ensuite une seconde lecture où il ne ferait que des liens verbaux entre ces images. Ch. s'est entraîné systématiquement à procéder de cette façon et ses résultats s'en sont trouvés grandement améliorés. Cependant, si cette méthode lui a permis d'améliorer sa compréhension des textes, cela reste insuffisant pour l'amener à faire les liens nécessaires à la rédaction d'une démonstration. Non seulement il faut lui apprendre à construire des liens au moment du rappel d'un texte, mais il faut qu'il fasse ces liens au moment de la première prise de contact avec le texte ou la figure. Le cas suivant va préciser les difficultés suscitées par un certain type d'évocation visuelle.

QUELQUES DIFFICULTÉS EN GÉOMÉTRIE CAUSÉES PAR UNE ÉVOCATION VISUELLE EN IMAGES FIXES

On pourrait croire que, pour tout élève visuel, une explication à partir d'une image va permettre la compréhension. On va voir qu'il faut apporter des nuances à cette affirmation.

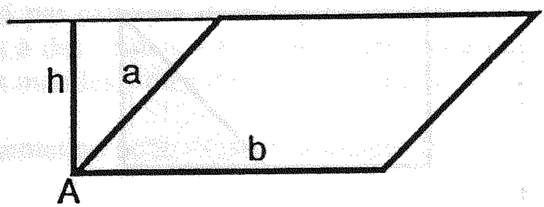
Fa est née en Algérie où elle a fait ses études primaires. Elle a poursuivi ses études en France. Elle est de niveau troisième. Elle désire faire un CAP. Les mathématiques lui paraissent difficiles et elle a eu de la difficulté à s'adapter au système français. Son français est de bonne qualité, bien qu'elle soit toujours inquiète à ce sujet et désire l'améliorer en lisant.

Elle évoque un texte sous la forme d'images visuelles fixes qu'elle superpose en grande partie, ce qui fait qu'elle ne prend que très peu conscience de la chronologie de ce qu'elle lit ou écoute. Un seul mot évoque une image et peut déterminer le sens de toute une phrase, indépendamment des autres mots qui composent la phrase. Elle n'évoque que fort peu les sentiments et tout ce qui est ressenti. Elle évoque une image globalement, mais ne parvient que très partiellement à la reproduire.

En mathématiques, les images lui donnent souvent l'impression qu'elle a « compris », mais elle a le sentiment qu'il lui est impossible d'expliquer. C'est une impression qu'ont souvent les visuels. S'étant donné une image fixe sur laquelle elle surimpressionne de nouvelles images au fur et à mesure que de nouvelles informations lui parviennent, elle ne trouve pas les mots qui lui permettraient de retrouver la chronologie perdue par la nature de son travail mental.

Fa a donc une structure de base visuelle : images fixes, perte de la chronologie, difficulté à expliquer ce que pourtant on a l'impression de comprendre.

Fa connaît la formule qui permet de calculer l'aire d'un rectangle : on multiplie la longueur par la largeur.



Je lui demande de calculer l'aire de ce parallélogramme. Elle propose de multiplier *a* par *b*. Elle fait donc le produit des deux côtés du parallélogramme. Cette erreur est classique.

Je lui demande de comparer la longueur du côté *a* et la longueur de *h*. Elle regarde avec, semble-t-il, beaucoup d'attention :

« C'est la même longueur.

– Est-ce que tu peux imaginer que le segment *h* peut tourner autour du point A et vienne se placer sur le côté *a* ? »

Elle semble encore se concentrer :

« Oui.

– Et est-ce qu'ils ont la même longueur ?

– Oui.

– Mesure-les. »

Elle prend une règle. La mesure est différente. Surprise !

Ainsi, elle n'avait pas pu mentalement se donner la rotation du segment. Je lui montre ensuite ces deux dessins :

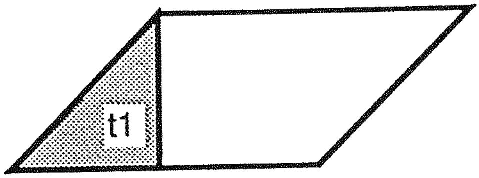


Figure 1

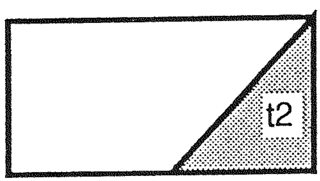


Figure 2

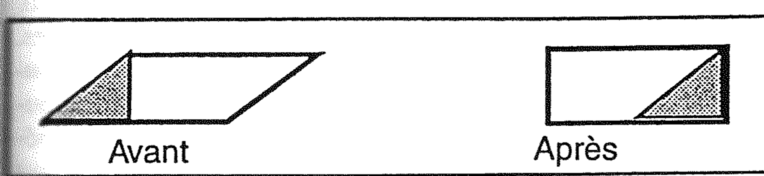
Je lui demande si elle voit un lien entre les deux figures. Devant son silence, j'ai le tort de lui demander d'imaginer que le triangle t1 est coupé et est ensuite placé de l'autre côté du parallélogramme. Elle a du mal à se convaincre de l'égalité des deux figures. Là encore, je lui demande d'imaginer autre chose que ce qui est devant elle. De plus, je lui demande d'imaginer un mouvement, ce qu'elle n'a pas l'habitude de faire. Elle sait évoquer des images concrètes mais ne peut évoquer des images construites.

Pour les visuels, poser le problème en terme de différence et non en terme de transformation

Je lui demande alors quelle différence elle peut voir entre les deux dessins. Elle me dit alors que le triangle gris n'est pas placé au même endroit. La question lui paraît beaucoup plus claire que la précédente : quand je lui demandais d'imaginer le déplacement du triangle t1, il lui fallait faire mentalement une transformation et l'équivalence du parallélogramme et du rectangle découle de cette transformation mentale. Elle ne pouvait faire mentalement cette transformation, et l'équivalence ne pouvait apparaître. Par contre, en posant la question en terme de différences entre deux figures, nul n'est besoin de transformer l'image existante, il suffit de constater que le triangle gris n'est pas placé au même endroit.

Voici par exemple deux façons de présenter les mêmes images à des visuels « à images fixes » et à des « visuels à images mobiles » ou à des élèves auditifs.

1. Présentation pour « visuels à images fixes » :



Question : quelles sont les différences entre les deux figures ? En déduire une façon de calculer l'aire du parallélogramme.

2. Présentation pour « visuels à images mobiles » :

On découpe
la partie grise...

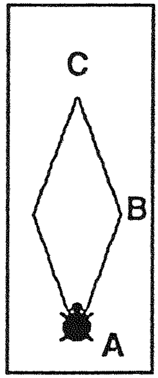
...et on la place de l'autre
côté du parallélogramme

Question : décrire la transformation et en déduire une façon de calculer l'aire du parallélogramme.

LES DIFFICULTÉS D'ANALYSE POUR UN VISUEL D'UNE SITUATION SÉQUENTIELLE

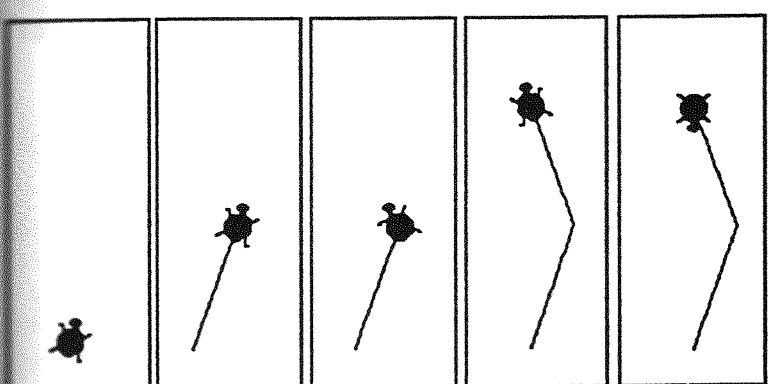
La situation suivante illustre encore l'importance pour un « visuel à images fixes » de chercher des différences et non pas des transformations pour faire des comparaisons. Il s'agit d'un exemple pris dans la programmation en Logo, langage informatique développé à des fins pédagogiques. Une tortue, dont il faut prévoir les déplacements pour pouvoir la diriger, obéit à des ordres correspondant à des mouvements de rotation ou de translation. Du point de vue expérimental, c'est une situation fort intéressante puisqu'il faut se représenter un déplacement avant que celui-ci n'ait lieu. On est donc toujours en situation d'avoir à anticiper un mouvement.

Il s'agissait de faire tracer par la tortue la moitié d'un losange. Elle se trouve en A (départ). Il faut la conduire en C (arrivée). Pour la conduire en C, on doit la faire passer par B.



On peut dire à la tortue soit d'avancer, soit de tourner en précisant à chaque fois la longueur du parcours à effectuer (avance 20) ou la mesure de l'angle de la rotation à effectuer (droite 30 ou gauche 30 par exemple).

Voici la bande dessinée du trajet que la tortue doit effectuer pour dessiner la première partie du losange :



S., une bonne élève, de niveau du bac, disait : « J'ai compris, mais je n'arrive pas à le faire dans le cas général. » Elle pouvait déterminer, par tâtonnement, que dans le cas où l'angle (a) du losange valait 40 degrés, elle devait d'abord tourner à droite de 20 degrés, puis il fallait avancer de la longueur du côté AB, puis tourner de 40 degrés vers la gauche, avancer encore de la longueur du côté, puis tourner de 150 degrés vers la gauche. Par contre, elle était incapable d'évaluer la valeur des angles dans le cas général, c'est-à-dire quand l'angle, au lieu d'avoir une valeur numérique, avait une valeur représentée par une variable, « a » dans ce cas.

Pour se placer dans le cas général, un élève verbal « raconte » l'histoire du voyage de A vers C : la tortue va devoir tourner vers la droite d'un angle valant la moitié de l'angle « a », ensuite elle devra avancer de la longueur du côté AB, etc. Pour S., il semblait impossible de se donner l'image de la tortue en mouvement. Arrivée en B, S. pensait que la tortue devait tourner de l'angle indiqué sur la figure ci-dessous (figure 1).

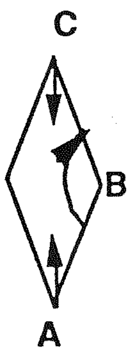


Figure 1

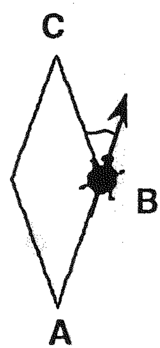


Figure 2

Pourtant, la tortue en B regarde dans la direction de la flèche (figure 2). Elle doit tourner de l'angle représenté sur cette figure. Pour cela, il faut imaginer la position de la tortue en B, et imaginer mentalement sa rotation.

Je demandai à S. de représenter la tortue en B. S. la plaça de cette façon :

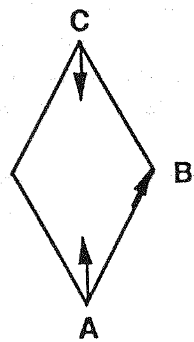


Figure 3

Puis elle m'indiqua encore le même angle de rotation pour la tortue en B (figure 1). Elle ne pouvait répondre à la question parce que je la posais en terme de déplacement.

Je posais la question autrement. Je lui demandais de représenter la tortue après son arrivée en B, et après son arrivée en A. Il n'y avait plus de déplacement à imaginer, mais simplement une situation à représenter. Elle a fait cette figure dans lesquelles les flèches représentent les positions successives de la tortue.

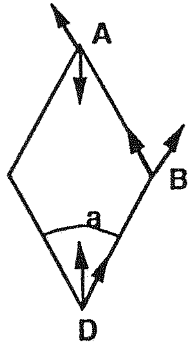


Figure 4

Sur cette figure, S. a ensuite pu évaluer les angles en B (gauche a) et en A (gauche [180 – a/2]) en fonction de l'angle du losange. Au lieu d'imaginer un déplacement sur le losange, il lui a fallu placer toutes les informations sur la figure pour établir ensuite les relations qu'elle cherchait. Rappelons que S. est une bonne élève, mais il faut lui poser ce genre de problème en terme de différences et non de transformation. C'est maintenant une future enseignante.

Voici un autre exemple du même type. Nous voulons évaluer grossièrement la valeur de π. Voici comment on peut procéder :

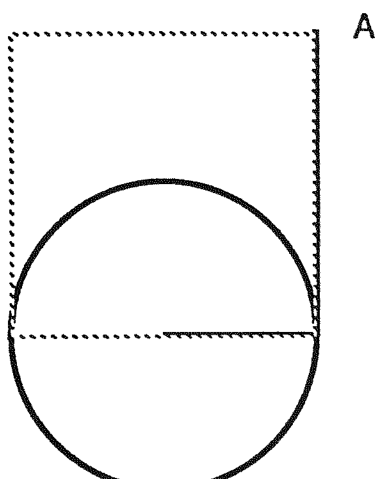


Figure 1

Le trait vertical est de la même longueur que le diamètre du cercle. On demande d'imaginer que l'on courbe ce segment pour l'appliquer sur le cercle. Où va se trouver l'extrémité A du segment après la torsion ?

Certains donnent une évaluation convenable de la position du point A et imaginent que si l'on recommence l'opération, on pourra placer facilement trois fois la longueur du diamètre dans le cercle. Mais ce ne sont pas des « visuels » du genre de Fa qui vont le faire, le travail mental qui consiste à courber mentalement le segment pour l'appliquer sur le cercle étant un travail qu'ils font mal.

En revanche, on peut leur demander de prendre une bande de papier de la longueur du diamètre et de la courber effectivement sur le cercle et de marquer ensuite l'extrémité (première flèche). On leur demande ensuite de recommencer l'opération à partir de cette marque sur le cercle et ainsi de suite. On obtient cette figure :

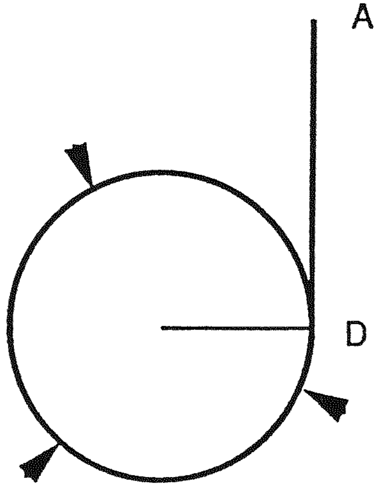


Figure 2

Pour des visuels, le fait d'avoir fait la manipulation ne va pas les aider directement à évoquer la courbure du segment sur le cercle, même si cela peut être rassurant pour eux. Une fois l'activité manuelle terminée, il faudra revenir à la figure de départ et tenter de se représenter mentalement la courbure du segment. L'évocation est toujours nécessaire après une manipulation.

On peut donner quelques techniques adaptées à des chaînes évocatives différentes pour présenter le sens du nombre π.

1. Demander d'imaginer mentalement la torsion du segment

sur le cercle : ce travail mental est possible pour les auditifs qui peuvent se donner des images dans le prolongement des mots.

Pour les auditifs qui ne parviennent pas à se représenter la torsion du segment, ils peuvent imaginer par exemple que deux personnes se déplacent à la même vitesse en partant en même temps du point D. Où sera celui qui se déplace sur le cercle quand celui qui se déplace sur le segment arrive en A ? On peut leur demander aussi de simuler le déplacement en déplaçant la pointe d'un crayon tenu dans la main gauche sur le cercle et la pointe d'un crayon tenu dans la main droite se déplaçant sur le segment vertical.

Chaque fois que l'on demande à un élève de manipuler physiquement, il est bon de demander ensuite de se redonner mentalement une représentation de cette manipulation.

2. On peut demander de faire la manipulation qui consiste à courber une bande de papier sur le cercle. Les élèves verbaux vont pouvoir se parler pendant ou après la manipulation. C'est ce discours qu'ils pourront évoquer ensuite. Pour certains, le simple fait de voir un autre faire cette manipulation va suffire.

3. Les visuels pourront faire la même manipulation ou la voir faire. Ils garderont ensuite en tête le résultat de cette manipulation, c'est-à-dire la figure 2.

4. On peut commencer par donner une définition du nombre π par exemple : « C'est le rapport de la longueur de la circonférence au diamètre du cercle » et ensuite faire un travail analogue à celui que nous venons de décrire.

On établit ainsi des « canaux de communication » en relation avec les chaînes évocatives personnelles des élèves.

La rigidité des codes imagés fixes

Les codes imagés sont beaucoup plus rigides : une fois formés, il est très difficile de les modifier mentalement. D'après Reed et Johnsen [5], il est de même impossible de les décomposer mentalement en parties. J.-F. Richard [6] rapporte le mot d'Alain selon lequel « on peut bien former l'image du Parthénon, mais non en compter les colonnes ». L'habitude de se donner un codage visuel fixe peut donc donner cette impression de compréhension globale, mais aussi d'impossibilité à analyser : « Je comprends mais je ne peux pas expliquer. » Ceux qui ont ce sentiment doivent apprendre à se donner une représentation non pas seulement de l'ensemble, mais aussi des parties au moment de l'évocation, et non pas tenter de le faire après. Ils doivent comparer les divers éléments en mettant en évidence leurs différences. Cela fait, ils évoqueront en même temps la figure et sa décomposition.

Faisons le point

Dans les exemples précédents, nous voyons que le sens donné aux mathématiques dépend étroitement des modalités de l'évocation pratiquée par chacun. L'utilisation d'un bon canal de communication permet aussi de provoquer cette intuition du sens, que l'on parte d'associations verbales pour aller vers des représentations géométriques comme I., d'une nécessité purement logique comme Dal., de l'expérience faite, ressentie et dite comme A., de l'évocation de représentations imagées comme Fred, des différences entre images visuelles évoquées comme S.

5. *Detection of parts in patterns and images* (1975), *Memory and cognition*, 1, p. 157-163.
6. *Les activités mentales*, Armand Colin.

Chacun doit trouver une approche des mathématiques qui s'apparente à un apprentissage qu'il réussit bien dans un autre domaine. L'attitude de L. a complètement changé quand il a pris conscience qu'il pouvait y avoir une analogie entre l'apprentissage du maniement d'un canoë, qu'il réussissait parfaitement, et l'apprentissage des mathématiques, domaine où il échouait.

Ce n'est pas ce qui est «concret» qui fonde l'apprentissage, mais ce qui est facilement évocable. Pour les uns ce peut être le vocabulaire, pour certains la cohérence logique, pour d'autres des représentations imagées ou symboliques, et ce ne sont là que quelques exemples.

V

Résolution de problèmes

« C'est un fait universel qu'on observe dans tous les pays et à toutes les époques : il y a une espèce de curiosité innée et naturelle de l'être humain à résoudre des devinettes. Ne cherchez pas plus loin, les neuf dixièmes des mathématiques, en dehors de celles qui ont été suscitées par des besoins pratiques, sont des résolutions de devinettes [1]. » La devinette, dans le cours de mathématique, s'appelle « problème ». Pourtant cette curiosité innée se transforme souvent en ennui craintif à l'école et Dieudonné continue : « La phobie des problèmes, c'est un non-sens intellectuel. » De nombreux élèves n'aiment pas résoudre des problèmes. Ils pensent que la solution est toujours unique et que cette solution leur est inaccessible et imposée. Ils ne savent pas chercher à partir de ce qu'ils connaissent. Ils ne savent pas que la recherche d'une solution se fait dans une certaine atmosphère de liberté.

Le problème n'est pas l'exercice. La solution d'un problème ne se fait jamais en répétant exactement une solution

---

1. Jean Dieudonné, *Penser les mathématiques*, Point Sciences, p. 23.

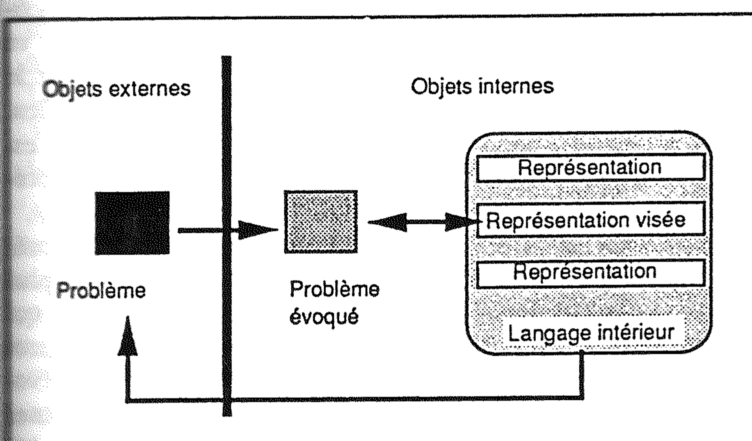
déjà rencontrée. Il y a toujours un aspect nouveau. Un problème, c'est aussi un peu un jeu dont les règles sont parfaitement déterminées.

Un problème est constitué d'une situation initiale, de contraintes à respecter et d'un but non immédiatement accessible. Pour atteindre ce but, des stratégies différentes sont possibles. Ce qui est un problème pour un individu n'est bien souvent qu'un exercice pour un autre, selon l'âge ou l'expérience. Un problème n'est pas difficile dans l'absolu. Il l'est en fonction de celui qui veut le résoudre et du contexte dans lequel il se trouve. Un ordinateur peut résoudre des problèmes d'échec mieux qu'un excellent joueur, mais il ne peut lever des ambiguïtés linguistiques qui ne posent aucune difficulté à un enfant de 10 ans.

A priori, on ne sait pas résoudre un problème. On se trouve toujours devant une situation complexe génératrice d'inconfort. Il faut savoir que cette impression est normale parce qu'il n'y a pas d'activité intellectuelle sans complexité. Non seulement on peut surmonter cette impression d'inconfort, mais encore en profiter si l'on dispose de façons de procéder qui conduisent souvent au succès.

Si la solution du problème ne peut être immédiate, il faut avoir à sa disposition des façons de procéder qui sont « habituellement efficaces ». C'est ce qu'on appelle des heuristiques. Ces « heuristiques » ne sont que des projets mis en application au moment de la résolution du problème : projet de se représenter le problème, projet de trouver des exemples analogues au problème à résoudre, projet de le simplifier, projet de le scinder en une séquence de problèmes plus facilement accessible, etc. Il n'y a pas de recherche de solution sans ce moment où l'on se dit : « Et si je faisais telle chose, peut-être que j'obtiendrai quelque chose que je connais... » La résolution d'un problème est intimement reliée à la capacité de se donner des projets, d'anticiper, de prévoir. Tout comme la mémorisation, la résolution de problèmes demande d'envisager le présent en fonction d'un certain futur. Pour obtenir une situation familière (but à atteindre), je dois transformer ce problème qui est devant moi (situation présente). Ou encore, pour obtenir une situation plus simple (futur), je dois réorganiser le problème (présent) en plusieurs problèmes qui me sont familiers.

Il faut donc avoir en tête en même temps ce qu'on veut obtenir (situation visée possible) et ce dont on dispose (problème évoqué) avec le projet de faire évoluer le problème évoqué vers la situation visée. Si l'on ne parvient pas à faire ce rapprochement, il faut alors changer la situation visée, transformer éventuellement la représentation qu'on s'est faite du problème et recommencer.



Le problème évoqué et la représentation visée sont mentalement présente et l'on cherche à faire évoluer la représentation du problème vers la représentation visée. En cas d'échec, on change la représentation visée ou on modifie éventuellement l'évocation du problème qui « fait penser » à une autre représentation familière qui devient la représentation visée.

Pour résoudre un problème, on doit donc avoir une banque d'heuristiques et de représentations visées possibles. Savoir évoquer un problème, c'est s'en faire une représentation qui va permettre de se rapprocher d'une représentation mathématique familière, puis faire coexister mentalement les deux représentations, et les faire évoluer l'une vers l'autre. Il s'agit d'un projet complexe, aux modalités infiniment variés. Nous l'abordons sous l'angle du travail de représentation mentale et du projet. Il y a d'autres approches, nous sommes donc loin de faire le tour complet de tous les aspects reliés à « la résolution des problèmes en mathématiques ».

Nous emploierons les mots évocation et représentation : l'évocation est le processus qui permet d'obtenir une représentation. La représentation est donc l'objet évoqué.

Pour résoudre un problème, il faut commencer par s'en donner une représentation personnelle. Lorsqu'un physicien donne un problème à un mathématicien, ce dernier va travailler quelquefois fort longtemps pour transformer le problème du physicien en un problème de mathématicien. La première difficulté dans la résolution des problèmes est d'en pénétrer le sens, donc de s'en faire une ou des représentations les plus complètes possible.

Il ne faut pas s'étonner que, parmi les multiples représentations d'un même problème, un élève le réussisse plus facilement s'il choisit une représentation selon le mode qui corresponde à ses habitudes évocatives. La solution du problème va dépendre beaucoup plus de la représentation évoquée que de l'énoncé lui-même, et là encore, parmi toutes les stratégies possibles, celle qui va apparaître la plus simple sera celle qui aura les caractéristiques des habitudes évocatives de celui qui résout le problème. Partons à la rencontre des élèves. Nous allons d'abord en considérer trois tentant de résoudre le même problème, le premier ayant un mode d'évocation verbale, le second visuel, le troisième plus kinesthésique. À travers ces exemples, nous préciserons les modalités d'évocation d'un problème et les façons d'intervenir pour favoriser cette évocation. Nous commencerons à caractériser le « langage intérieur mathématique ».

CAS 1 : LA STUDIEUSE LECTURE DE J. ET LA LENTE ÉVOCATION À PARTIR DES MOTS

Avant de commencer la lecture de l'énoncé, je demande à J. s'il se souvient des gestes mentaux qui lui ont permis de mémoriser et de comprendre le texte écrit : il se souvient qu'il se redisait les mots pour susciter des images visuelles, et que c'est de cette traduction qu'il prenait conscience du sens de ce qu'il venait de lire. Après ces rappels, J. avait un « projet d'écoute » assez précis.

Je lui lis maintenant le texte du problème :

« Dans un restaurant, on sert deux sortes de desserts différents : des gâteaux au chocolat et des tartes aux pommes.
Les 3/4 des desserts servis sont des tartes aux pommes.
Vendredi soir, on a servi 135 tartes aux pommes.
Combien de desserts a-t-on servi ce soir-là ? »

Après ma lecture, il désire lire le texte lui-même. Il le fait à voix basse et le récite à peu près parfaitement. Cependant, il n'a pas l'impression d'en avoir compris le sens complètement et ne se sent pas prêt à le résoudre. Il va donc l'écrire de mémoire.

Cela fait, et bien fait, il veut maintenant le relire « dans sa tête » pour se faire des images visuelles. Cette relecture silencieuse dure presque une minute. Après la résolution du problème, J. dira que c'est surtout à ce moment que le sens du problème lui est apparu. « J'ai regardé ce qui se passait, j'imaginais l'intérieur du restaurant. Les trois quarts du temps, c'est les tartes aux pommes qui sont servies aux gens. Il y en a 135 tartes servies. »

– Es-tu prêt à le résoudre maintenant ?

– Oui. »

Il commence par diviser 135 par 4 : regard désespéré, ça ne tombe pas juste ! Il se tait puis : « Il faut diviser par 3, pas par 4 ! Je m'imaginais qu'il y avait 135 desserts au total, mais ce ne sont que des tartes aux pommes. Il n'y a que 3 tartes aux pommes sur 4 desserts. »

Il fait la division 135 par 3, trouve 45 et multiplie par 4. Le résultat est de 180 desserts.

Le problème a été résolu sans aucune représentation graphique. Il me dit d'ailleurs qu'un dessin ne l'aiderait pas, mais qu'il veut bien essayer de « dessiner » le problème.

Il représente trois tartes aux pommes dans trois assiettes et un gâteau au chocolat dans une quatrième assiette. Il m'explique le lien qu'il fait entre 3 sur 4 et son dessin.

« Mais comment pourrais-tu représenter les 135 tartes du problème ?

– Il suffit d'imaginer que chaque tarte en représente 45. Le dessin est plus facile à faire après avoir résolu le problème qu'avant, ajoute-t-il. Ça n'aide pas à résoudre le problème. »

Comme on le voit, J. ne s'appuie pas sur une représentation graphique pour résoudre le problème, mais simplement sur l'énoncé du problème. Pour faire les liens entre les différents éléments du problème, il doit avoir l'énoncé complet mentalement présent, et le travail essentiel fut les multiples lectures qu'il a dû faire de cet énoncé avant de commencer la résolution.

J. est capable d'expliquer pourquoi il a divisé par 3 et multiplié par 4. D'autre part ce n'est pas parce que le dessin ne lui permet pas de résoudre le problème qu'il n'est pas important pour lui de représenter graphiquement le dessin après l'avoir résolu. Nous avons vu qu'il lui semble important de parvenir à l'élaboration d'une image visuelle à partir d'un énoncé pour avoir le sentiment de comprendre. Cette transformation mot-image lui permet aussi de mémoriser. Enfin les représentations imagées qu'il se donne vont lui permettre de développer l'intuition qui lui manque s'il reste simplement au niveau verbal.

J. est un élève faible et la façon dont il a résolu le problème n'est pas habituelle chez lui. Son succès provient du fait qu'il a lu l'énoncé en utilisant un processus qui lui permettait de donner du sens à un texte, en mathématiques ou ailleurs.

Prendre le temps de se pénétrer du sens des mots

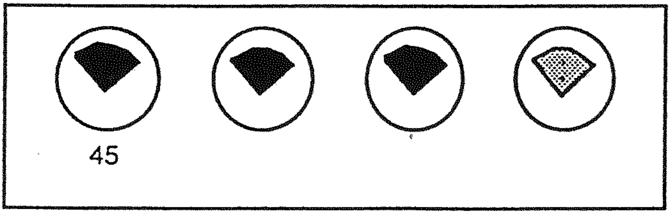
J. est parti des mots, les a intériorisés, s'est assuré de la conformité de ce qu'il a mémorisé avec le texte initial, puis a fait un long effort de visualisation du décor et des actions du problème. Il n'a pas appris par cœur le problème mais il a mis des mots en attente, comme nous avons vu que les auditifs le font fréquemment. Ils mémorisent des mots des énoncés dont ils ne comprennent pas complètement le sens. Le sens viendra après. J. s'est littéralement pénétré du sens de ce problème. Il lui fallait avoir l'ensemble du problème mentalement présent pour pouvoir modifier sa première impulsion qui était de diviser par 4 et non par 3.

Une partie des difficultés rencontrées par J. provient de ce qu'il ne prend pas, ou qu'on ne lui donne pas ce temps d'évocation indispensable : rappelons qu'il a écouté pour mémoriser, puis lu, puis écrit le texte de mémoire, puis lu pour se faire des images et que ce n'est qu'après qu'il a entrepris la résolution du problème. Le temps de représentation du problème a été long : au total plus de 5 minutes de lecture. S'il veut avoir le texte devant lui, c'est surtout pour avoir la maîtrise du temps de lecture.

On note aussi qu'il s'est représenté l'atmosphère du restaurant. Au lieu de simplifier à l'extrême les données du problème, il a rajouté des éléments qui lui permettaient de prendre conscience du problème. Pour ce faire, il doit se placer dans un cadre plus humain.

Apprendre à se donner des représentations imagées

Enfin la représentation graphique qu'il donne n'est pas une représentation de la réalité concrète du restaurant et de vraies tartes aux pommes, mais bien d'un concept associé à 3/4 et appliqué au problème.



Mais on voit que cette représentation est loin d'être spontanée. Elle reste encore très rattachée à une représentation concrète. J. nous dit que la représentation imagée ne l'aide pas, mais il est important d'apprendre à représenter en mathématiques des relations par des schémas. Il peut commencer à le faire après avoir résolu le problème, comme cela s'est produit au cours de l'entrevue. Il finira par acquérir ainsi un ensemble de représentations graphiques qui pourront servir de support à son intuition.

CAS 2 : DE L'IMAGE AU NOMBRE ET LA DIFFICULTÉ D'EXPLIQUER. LA SOUDAINETÉ DE L'INTUITION VISUELLE

L. ne se souvient que des notations visuelles du texte : les descriptions, les mouvements. Le reste lui est resté étranger. L. lit le problème et tente de me le redonner verbalement :

« Il y a des tartes aux pommes et des gâteaux au chocolat. 3/4 des tartes aux pommes se vendent le plus. Le vendredi, 135 des tartes aux pommes sont prises. Et la question est : "Combien de gâteaux au chocolat ?" »

Elle ajoute : « C'est ça la question ? »

Je lui demande de relire.

Cette fois-ci, elle me redonne le texte du problème presque mot à mot, sauf la question qui pour elle demeure toujours : « Combien de gâteaux au chocolat ? » Je lui demande si elle est sûre de la question : elle est sûre. Je lui demande de relire encore une fois.

Elle me redit le problème presque textuellement, et cette fois énonce la bonne question : « Combien de desserts ont été servis ce soir-là ? » Je lui demande encore si elle est sûre de la question. Non, elle doit vérifier.

Elle peut maintenant commencer la résolution du problème.

Elle commence par diviser 135 par 4 et dans la foulée me dit qu'elle n'est pas sûre parce qu'elle n'est pas bonne en mathématiques. Devant mon silence, elle revient au problème.

Elle continue : « 3 sur 4, 4 c'est tous les desserts. » Elle divise 135 par 3 et trouve 180.

« Si tu devais expliquer le problème à un autre, comment ferais-tu ?

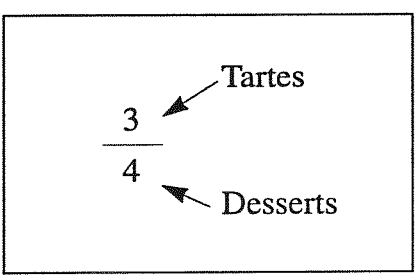
– Tu trouves 1/4, tu ajoutes à 135 et ça donne 180. »

Elle n'explique pas pourquoi elle fait ces calculs, mais ne fait qu'énoncer les opérations qu'elle vient d'effectuer.

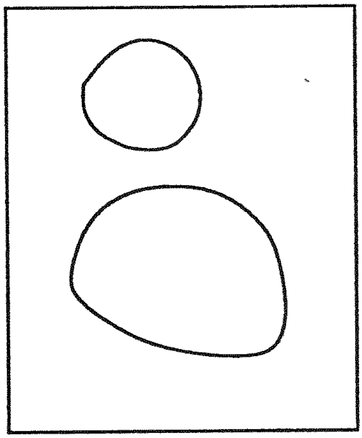
« Imagine que j'aie 12 ans et que tu doives m'expliquer pourquoi je dois faire ces calculs.

– 3/4, c'est des tartes, on a 3 tartes sur 4 desserts. »

Elle répétera : 3/4 de ce qui est servi, c'est des tartes aux pommes ; ou encore : 3, c'est les tartes qui sont le plus servies. Elle s'aide de ce dessin pour expliquer :



« Peux-tu faire un autre dessin pour m'expliquer ?



– En haut, ce sont les tartes, en bas les desserts au chocolat.

– Y a-t-il plus de tartes ou plus de gâteaux au chocolat ?

– Des tartes.

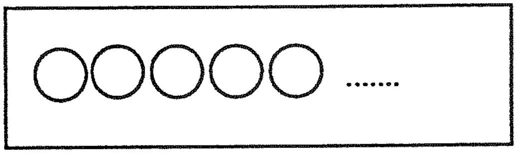
– Est-ce qu'on le voit sur le dessin ?

– Non. »

Elle grossit le rond du haut.

« Est-ce que ton dessin indique les opérations qu'il faut faire ?

– Non. On pourrait dessiner les tartes :

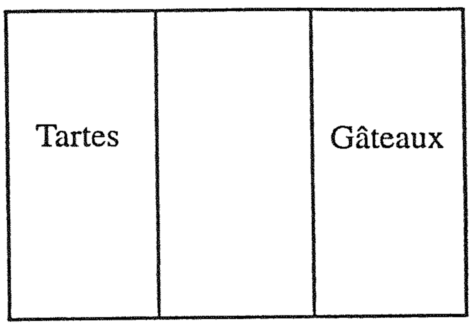


On pourrait imaginer 135 ronds. »

Elle demeure toujours incapable de trouver une explication faisant le lien entre l'opération et le problème, comme de donner une représentation imagée qui pourrait être associée à une telle explication.

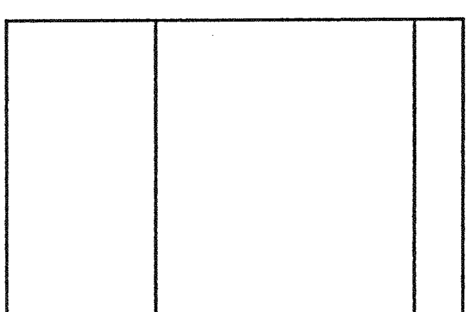
« Est-ce que tu pourrais dessiner le restaurant ? »

Elle fait ce dessin :

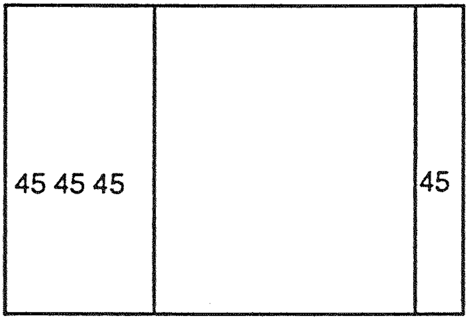


D'un côté, on place les tartes aux pommes, de l'autre les gâteaux.

Elle tente d'expliquer son calcul sur ce dessin et est très gênée par l'espace blanc. Enfin, elle barre tout et refait le dessin suivant :

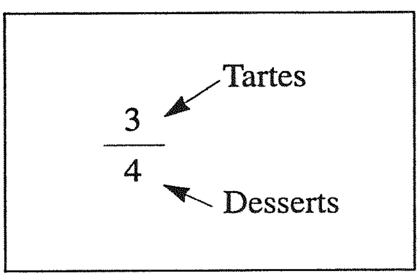


et le complète de cette façon :



Je lui demande maintenant si elle peut expliquer la façon de résoudre le problème. Elle me dit que le dessin n'est pas bon parce que c'est l'espace occupé par les tables qui est représenté, et qu'on n'est pas sûr que certaines personnes n'ont pas mangé plusieurs tartes... ce qui est tout à fait vrai. Pour elle, le dessin est très ambigu puisque son interprétation oscille entre la représentation d'une idée et la représentation d'une situation concrète (un restaurant, des tables, des clients).

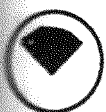
L. a une intuition de la solution : la division par 3 et la multiplication par 4. Cette solution ne repose pas sur une analyse verbale de la situation : elle ne peut pas trouver les mots qui justifient son calcul. Elle ne se repose pas non plus sur une représentation graphique de la situation qu'elle ne parvient que très difficilement à donner. La représentation la plus significative pour elle est celle-ci :



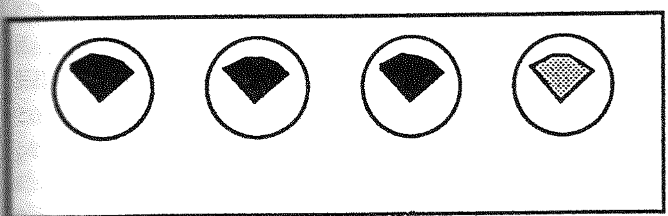
Comparaison des modes de représentation de J. et de L.

Alors que le dessin de J. part d'une représentation partielle pour aller vers une représentation globale, L. tente toujours de faire le contraire.

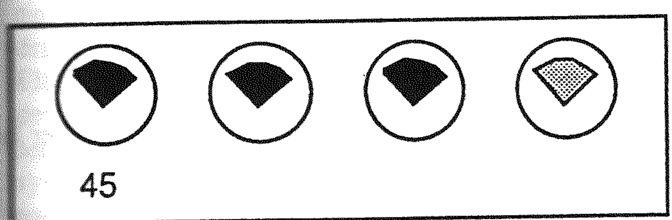
J. part d'une représentation d'une tarte :



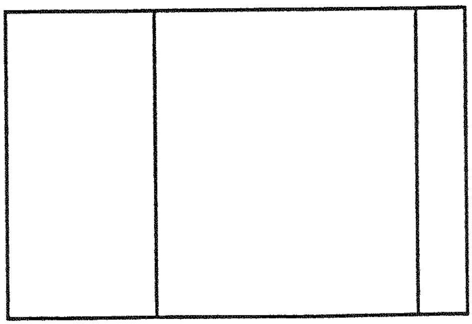
À partir de cette représentation, il représente toute la situation :



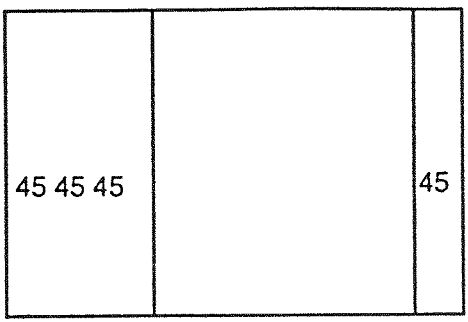
Ensuite, il place les nombres :



L. dessine donne d'abord une représentation globale :



Puis il place des nombres sur cette représentation :



Dans les deux cas, le dessin ne permet pas de trouver la solution, il suit la résolution.

Apprendre le temps d'évoquer

L. veut aller vite : la lecture du problème a été rapide. Elle se trompe de question et bien qu'elle relise le problème plusieurs fois, elle ne se corrige pas. Elle a une intuition soudaine de la solution. Ce sont les nombres qui expriment le sens du problème, mais elle ne peut trouver un schéma qu'elle puisse associer au problème, ni d'explication verbale. Le passage du texte à l'image est laborieux. L. n'évoque rien à partir des mots, et le temps d'évocation est si bref qu'il ne lui reste qu'une image très partielle. Elle est entièrement tournée vers l'extérieur et se comporte un peu comme un réflecteur qui renvoie tout ce qui lui parvient sans que cela laisse de traces.

Apprendre à construire et à lire des schémas exprimant des relations

Quand elle a évoqué une image, elle ne fait à peu près pas de lien avec d'autres évocations qu'elle aurait pu faire. Chaque évocation reste isolée. On voit donc ce qu'elle devrait faire pour améliorer son efficacité intellectuelle. Elle doit apprendre à maîtriser son impulsivité et prendre conscience de l'existence de gestes mentaux pouvant lui permettre de s'approprier ce qu'on lui montre, ce qu'on lui dit. Cette prise de conscience et la pratique de ce retour en elle pour donner du sens à ce qui l'entoure auront comme conséquence de la rendre moins dépendante de tout ce qui lui est extérieur, plus libre et plus sûre d'elle-même. Mais ce nouvel apprentissage de l'évocation devra être systématique : L. devra faire des exercices gradués où elle apprendra à reconnaître les gestes mentaux qui lui conviennent. Elle devra aussi apprendre à représenter des relations par des schémas : elle ne manipule mentalement que des représentations d'objets réels [2]. Il faudra aussi un entraînement systématique car l'entrevue a montré que, si elle pouvait parvenir à construire et décoder une image exprimant une relation, cela restait laborieux et lui semblait entièrement nouveau.

---

2. En employant le langage des paramètres, elle a un P1 visuel assez fort et un P3 très faible. Il lui faut développer le P3.

Apprendre à évoquer des énoncés en relation avec des schémas

Il faudra aussi lui donner l'habitude d'associer des énoncés à des images. Il faudra partir de l'image puisque c'est ce qu'elle évoque le plus facilement. Comme elle n'arrive que très difficilement à associer les mots à l'image, c'est au moment de l'évocation qu'il faudra lui faire faire cette association. À côté d'un schéma, on écrira son interprétation. On lui demandera d'abord de mémoriser le schéma, puis, cela fait, d'associer l'image et l'interprétation écrite. Ensuite, on pourra lui demander de reconstruire le schéma puis de le commenter. Il est souvent presque douloureux pour quelqu'un qui pratique une évocation globale d'avoir à décrire, à rédiger et plus tard à démontrer. L'image prend toute la place. Il faut donc lui apprendre à évoquer des relations entre image et mot. Si l'image seule est évoquée, il n'y aura que l'image au moment du rappel.

Les trois points précédents visent à mettre en place les outils mentaux qui peuvent permettre à L. de pénétrer dans l'univers mathématique.

CAS 3 : LA NÉCESSITÉ DE TOUT RECONSTRUIRE SOI-MÊME, PAS À PAS : DE L'ÉNONCÉ AUX CONCEPTS QUI PERMETTENT DE RÉSOUDRE LE PROBLÈME

K. n'a pu reproduire le schéma qu'en reproduisant le dessin à vue. Ensuite seulement, elle a pu le reproduire de mémoire. Il semble donc qu'elle doive agir pour évoquer et coder la réalité.

Phase 1 : Tentative d'évocation auditive et verbale de l'énoncé du problème

K. écoute l'énoncé et tente de le résumer de cette façon :

« Dans ce restaurant, on sert la moitié du temps trois quarts des tartes aux pommes. Dans cette journée-là, ils ont servi 130 tartes aux pommes.

– Il y a une question à ce problème ?

– Non. »

Puis après un temps d'arrêt :

« Oui : combien de tartes aux pommes il y a. »

Je lui demande de relire pour comparer ce qu'elle vient de dire au texte initial. Après la relecture, elle résume le texte de la façon suivante :

« On sert le quart du temps 3/4 de tartes aux pommes, mais aussi des desserts au chocolat. Combien a-t-on servi de tartes aux pommes ce soir-là ? »

On voit qu'il manque encore de nombreuses données. Dans son premier résumé, elle parlait de la « moitié du temps ». Elle parle maintenant « du quart du temps ». Aussi bien l'écoute du texte que sa lecture conduisent à une évocation incertaine.

Je lui demande alors de s'imaginer dans le restaurant et de relire le problème : elle ne fait pas de gain en ce qui concerne sa compréhension.

C'est donc encore l'échec : se mettre en scène ne lui permet pas une évocation plus précise.

Phase 2 : Évocation à partir de l'écriture de l'énoncé

Je lui demande alors de mettre par écrit les éléments les plus importants du problème avec l'énoncé devant elle. Elle écrit :

« 135 tartes aux pommes et des desserts au chocolat.

3/4 des desserts sont des tartes aux pommes.

Combien a-t-on servi de desserts ce soir-là ? »

Les éléments les plus importants sont bien là. En écrivant le problème, le sens lui est apparu. Je lui demande si elle peut me redire le problème sans regarder l'énoncé. Elle répond non. Je lui pose des questions sur le nombre de tartes aux pommes, la proportion de tartes aux pommes et la question posée : elle répond parfaitement à ces questions. Elle a d'abord l'impression qu'elle ne peut réussir ce qu'on lui demande, ce qui fait qu'elle n'essaye même pas.

Elle a dû écrire pour prendre conscience du sens du problème. On notera aussi la certitude qu'elle a de se tromper : son manque de confiance en elle est le premier handicap qui lui empêche de faire tout progrès.

Elle dit qu'elle peut maintenant passer à la résolution du problème.

Phase 3 : Échec de la résolution du problème en raison de l'impossibilité de se donner une représentation de « 3/4 »

Elle écrit : « 3/4, 1/4, 75/100, 25/100 = 100/100 »

« Je ne comprends pas. Qu'est-ce que tu sais du problème ?

– Il y a 3/4 de desserts.

– Qu'est-ce que ça veut dire ?

– Il y a plus de tartes aux pommes.

– Tu peux être plus précise ?

– Il y a 75 tartes aux pommes et 100 desserts au chocolat.

– Est-ce que ça pourrait être d'autres nombres ?

– 175/200 et 25/200

– Pourquoi tu me dis ça ?

– Parce qu'il y a plus de tartes aux pommes que de desserts au chocolat.

– Tu peux me donner d'autres nombres ?

– 1/4 et 3/4.

– D'autres nombres ?

– Non. »

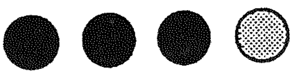
K. rassemble tout ce qu'elle sait concernant 3/4. Elle a de vagues souvenirs. Elle énonce des nombres ou des fractions reliés à 3/4, mais sans aucun lien logique. Elle est sûre que 3/4 représente plus que 1/4.

« Si on avait 3 tartes aux pommes, combien aurait-on de gâteaux au chocolat ?
– 1.
– Et si nous avions 6 tartes ?
– 1 encore.
– Et 9 ?
– 1 encore. »
Elle explique que 3, c'est sur 4, 6 c'est sur 7, et 9 c'est sur 10.
– « Et 75 ?
– Ça fait 25 gâteaux au chocolat.
– Pourquoi tu me dis ça ?
– Le 100 pour 100, c'est tout ensemble.
– Les 3/4 de 100, ça fait combien ?
– 75.
– Et les 3/4 de 12 ?
– 9/12.
– Ce n'est pas un nombre mais une fraction que tu me donnes. Et si je te donne 12 gâteaux et si je te demande de m'en donner les 3/4, combien vas-tu m'en donner ?
– 9.
– Est-ce que c'est une fraction ?
– C'est des gâteaux.
– Et 3/4 de 8 ?
– 6.
– Revenons au problème : si nous avons 6 tartes aux pommes, combien avons-nous de gâteaux au chocolat ?
– Je ne sais pas. »
On peut constater toute l'incohérence de ses connaissances. K. n'a pas de représentation de 3/4 qui puisse lui permettre de résoudre le problème. Elle n'a à sa disposition que quelques associations qui n'ont pas de liens entre elles.

Elle sait simplement qu'elle a déjà associé 3/4 à 3 sur 4 et à 75 sur 100, mais il n'y a pas de lien entre 3 sur 4 et 75 sur 100. Elle ne peut se représenter l'énoncé du problème puisqu'elle ne peut s'en représenter un élément essentiel : « Les 3/4 sont des tartes. »

Phase 4 : Élaboration d'un premier type de représentation de l'expression « 3/4 sont des tartes »

Je poursuis : « On est dans le restaurant, et on a servi 3 tartes aux pommes. Dessine ce qu'on sert :

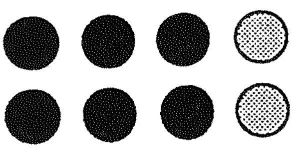


– Et maintenant 4 nouveaux clients arrivent ; que se passe-t-il ?

– Il n'y a plus de gâteaux dans les cuisines (rires).

– On va dire qu'il en reste aux cuisines. »

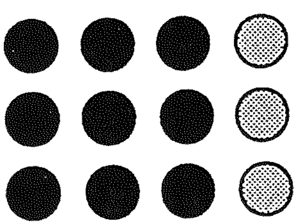
Elle ajoute une ligne à son dessin.



K.: « Il y aura 6 et 2.

– 4 clients arrivent encore. »

Elle ajoute encore une ligne :



K.: « C'est 9 et 3. »

Nous revenons au dessin qu'elle a fait :

« Qu'as-tu dessiné ?

– Les 4 nouveaux clients et les trois quarts.

– Sur le dessin, où est le 3 et où est le 4 ? »

Elle montre les 3 tartes aux pommes sur une ligne et ajoute :

« Le 4, y en a pas.

– Moi je vois le 4. »

Elle regarde de nouveau. Après quelques instants :

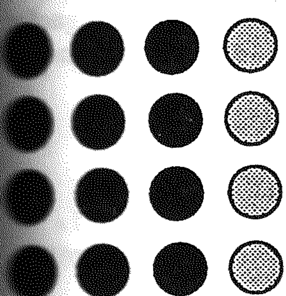
« Ah ! les 4 desserts.

– Pourquoi dit-on 3/4 ? »

Elle explique sur le dessin le lien entre le 3 et le 4. Il y a 3 tartes aux pommes sur 4 desserts.

Je lui demande maintenant : « Si nous avons 12 clients ? »

Elle ajoute encore une ligne au dessin :



« Combien y a-t-il de desserts ?

– 16. »

K. a un moyen de construire une représentation de problèmes analogues à celui qui lui est posé.

Nous avons abandonné le problème initial pour en résoudre un beaucoup plus simple que K. savait résoudre : nous n'avons plus que 3 tartes aux pommes. Elle peut progressivement représenter des problèmes plus compliqués : [illegible] tartes aux pommes, puis 12, etc. Aucune explication n'est donnée à K. C'est elle qui fait évoluer les premières représentations très simples vers des représentations plus compliquées.

On peut résumer la démarche suivie de cette façon :

Représentation d'un problème très simple, mais analogue au problème initial.
Complexification progressive du problème et élargissement de la représentation.
Première généralisation de la représentation choisie.
C'est l'élève qui fait le travail de représentation et qui associe les diverses représentations.

Phase 5 : Représentation mentale numérique des mêmes problèmes et première généralisation

« Maintenant tu ne dessines plus, mais tu peux regarder les dessins que tu as déjà faits. Il y a 24 tartes aux pommes. Combien a-t-on de gâteaux au chocolat ?
– 4, non 8.
– Tu es sûre ?
– Oui.
– Nous avons 36 tartes aux pommes.
– 16.
– Explique-moi.
– 24 fois 2, ça fait 36. »

Elle fait le calcul, prend conscience de l'erreur, mais ne trouve pas de solution.

On peut constater que le travail de représentation qu'elle a fait a bien induit une évocation puisqu'elle est capable de généraliser jusqu'au moment où elle fait une erreur de calcul. Nous avons changé maintenant le processus de représentation : elle accomplit un travail purement mental. Là encore aucune explication ne lui a été donnée. On lui demande simplement de se construire une nouvelle représentation à partir de ce qu'elle a elle-même fait.

Phase 6 : Mise en évidence d'une structure numérique associée aux représentations précédentes

On écrit maintenant de cette façon les résultats obtenus :

$$\begin{tikzcd}
3 \arrow[r] & 1 \\
6 \arrow[r] & 2 \\
9 \arrow[r] & 3 \\
12 \arrow[r] & 4
\end{tikzcd}$$

On reprend les calculs en complétant le graphique de cette façon :

$$\begin{tikzcd}
3 \arrow[r] \arrow[d, bend right, "X2"'] & 1 \arrow[d, bend left, "X2"] \\
6 \arrow[r] \arrow[dd, bend right, "X4"'] & 2 \arrow[dd, bend left, "X4"] \\
9 \arrow[r] & 3 \\
12 \arrow[r] & 4
\end{tikzcd}$$

« Et si nous avons 36 tartes aux pommes ? » Elle complète le graphique de cette façon :

$$\begin{tikzcd}
3 \arrow[r] \arrow[d, bend right, "X2"'] & 1 \arrow[d, bend left, "X2"] \\
6 \arrow[r] \arrow[dd, bend right, "X4"'] & 2 \arrow[dd, bend left, "X4"] \\
9 \arrow[r] & 3 \\
12 \arrow[r] \arrow[d, bend right, "x3"'] & 4 \arrow[d, bend left, "x3"] \\
{} & {}
\end{tikzcd}$$

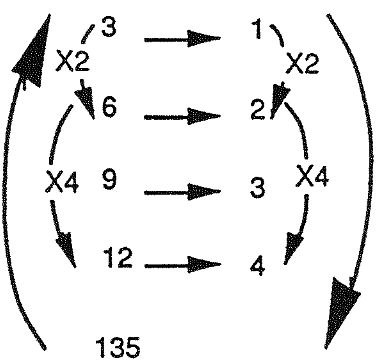
Elle trouve alors 12 gâteaux au chocolat et 48 desserts en tout.

Elle résoudra ensuite tous les problèmes qui lui seront proposés en se reportant au schéma ci-dessus. Le graphique est donc un outil efficace. Elle l'utilise à bon escient pour résoudre les problèmes qu'on lui pose. Elle démontre une certaine souplesse à cet exercice. Quand elle a 72 tartes aux pommes, elle choisit 9 parce qu'elle sait que $9 \times 8 = 72$. Pour 120, elle prend 12.

Après le travail de représentation uniquement mental, nous revenons à une autre représentation de ce qui a été fait jusqu'à maintenant, une représentation purement numérique dans laquelle nous pouvons mettre en évidence des relations et une structure. Ce tableau numérique est cependant rattaché à tout le travail précédent. Il peut donc être associé aux tartes, comme aux dessins de phase 4, comme aux calculs de la phase 5.

Phase 7 : Résolution du problème initial à partir des structures précédentes

On revient ensuite au problème initial : 135 tartes aux pommes servies. Elle place le 135 en dessous de la première colonne.



Elle choisit alors de relier le 135 au 3 (flèche de gauche), elle divise 135 par 3, trouve 45 qu'elle ajoute à 135 pour donner le résultat 180. Non seulement elle a pu utiliser la structure du tableau pour trouver 45, mais elle a pu revenir au problème concret qu'elle était en train de résoudre, c'est-à-dire le nombre de desserts servis ce soir-là.

Le tableau numérique a donc plusieurs sens maintenant : il a une structure exprimée par les flèches et les relations numériques entre ses divers éléments. Il renvoie aussi à une situation concrète : un restaurant, des tartes aux pommes, des desserts au chocolat. Si K. a pu résoudre le problème, c'est parce que ces divers sens étaient mentalement présents en même temps. C'est cette simultanéité qui permet de trouver la solution. L'essentiel de la représentation mathématique consiste donc à se représenter des liens et non pas des objets. Dans l'approche que nous avons choisie, nous n'avons pas expliqué, mais nous avons placé K. dans une situation où elle devait construire elle-même les liens.

Améliorer ses capacités d'évocation en passant par l'écriture, l'action et la reconstruction progressive des concepts

Comme dans le cas de J., on a suggéré à K. une démarche analogue à celle qui semblait efficace dans le cas de l'écoute du texte et de la reproduction du dessin : écriture de l'énoncé, puis évocation immédiate, construction d'une représentation qui part d'un cas simple et qui se complique peu à peu, écriture des nombres organisés dans une structure analogue à la représentation spatiale construite à l'étape précédente. C'est elle qui a dû faire les liens entre le problème évoqué, la représentation spatiale et la structure numérique. C'est un principe général. La compréhension se fait au moment où l'on fait seul le lien entre des représentations différentes. Si on explicitait les liens entre deux formes différentes de représentation, cela reviendrait à lui demander de les mémoriser au lieu de les construire, ce qui revient à transformer en exercice de mémorisation (mémoriser des liens) ce qui est un exercice de compréhension (établir et évoquer des liens).

K. est kinesthésique dans le sens où une évocation semble passer par une implication physique. Elle doit écrire, dessiner, construire. Elle n'a pas à ressentir, à s'imaginer dans une situation et éprouver certaines sensations pour amorcer son évocation, comme doivent le faire d'autres kinesthésiques. Elle doit agir concrètement.

Dans tous les cas, il est essentiel de donner les moyens d'évoquer l'énoncé et de se donner une représentation

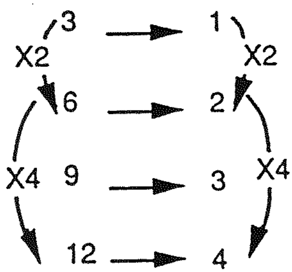
Dans les trois cas, on voit l'importance de l'évocation initiale de l'énoncé : J. a pu réussir le problème parce qu'il a pris le temps de se représenter longuement, à partir de ses habitudes évocatives. L., impulsive comme beaucoup de visuels qui veulent trouver immédiatement une solution, se trompe de question. Il faudra plusieurs lectures pour qu'elle prenne conscience de la question. K. rajoutait des morceaux de phrase qui rendait le problème incompréhensible : « On sert la moitié du temps », puis « On sert le quart du temps ». Là encore le problème n'a pas été évoqué, même s'il était partiellement « récité ».

RÉSOUDRE UN PROBLÈME, C'EST D'ABORD SE LE REPRÉSENTER

Résoudre un problème, c'est d'abord s'en donner une représentation. On ne commence pas par se représenter un problème, puis on le résout, comme on le dit quelquefois. Le travail de représentation se poursuit tout au long de la résolution du problème, jusqu'à ce qu'on reconnaisse une situation déjà rencontrée ou que la représentation du problème soit telle que sa solution paraisse évidente. Le premier contact avec le problème provoque une première évocation : c'est ce qu'a fait J. par sa lecture studieuse avec le projet de se faire des images dans la suite des mots lus. Mais quand il tente de faire sa division par 4, il ne fait que se représenter le problème en quantifiant sa représentation : on peut séparer en 4 parties les tartes aux pommes. À ce moment-là, il se rend compte que cette représentation des tartes aux pommes en 4 parties ne lui permet pas de se représenter les desserts au chocolat, c'est donc que la représentation choisie des tartes aux pommes séparées en 4 ne l'aide pas. Mais une séparation en 3 parties donne une représentation du problème qui permet de connaître le nombre total de desserts. Trouver la solution, ce n'est que trouver une représentation dans laquelle la réponse cherchée est particulièrement facile à trouver. À une opération donnée, correspond une organisation des données. C'est cette organisation des données qui fait le pont entre une première représentation du problème et une autre représentation qui va donner la solution.

Le travail effectué par K. pour trouver la solution est un bon exemple du travail de représentation. Elle veut d'abord prendre conscience des données du problème, ce qui passe déjà par une représentation correspondant à sa façon d'évoquer. Elle doit écrire, et pendant l'écriture elle prend conscience des mots. Elle doit se représenter très précisément un problème analogue, mais beaucoup plus simple. La situation qu'elle représente sera progressivement compliquée, mais de façon à ce qu'elle puisse toujours construire elle même la représentation. Enfin, elle finit par construire une représentation qui va s'appliquer au problème posé : le problème est résolu.

La représentation numérique de la forme :



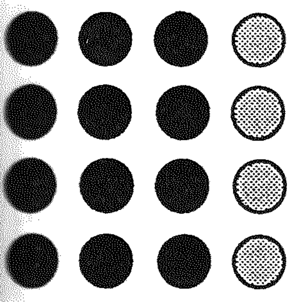
est aussi une représentation du problème. Ce tableau a une structure, c'est-à-dire qu'il y a une relation entre la disposition spatiale des nombres et des relations entre eux. Mais un tableau de ce genre peut aussi représenter le problème posé, et c'est cette double caractéristique de ce tableau qui en fait la richesse et lui confère sa puissance.

Plus on résout de problèmes, plus on passe explicitement de temps à se le représenter. Cela a sans doute deux causes : la première est que celui qui résout beaucoup de problèmes sait l'importance de ce travail de représentation. La seconde raison est qu'il dispose de nombreuses possibilités de représentations associées à des concepts mathématiques. Nous dirons qu'il a un langage intérieur beaucoup plus riche. Il va donc rechercher, dans cette banque de représentations, celles qui vont lui permettre de représenter le problème de façon à ce que la solution lui paraisse la plus évidente possible. Celui qui ne résout que très peu de problèmes croit qu'une opération, qui lui fera faire l'économie de la représentation mentale, va lui donner la solution.

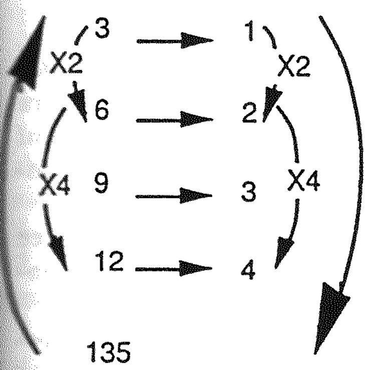
Le langage intérieur mathématique

K. n'avait pas de représentation utilisable de l'expression « 3/4 sont des tartes aux pommes ». Une expression de ce genre est typiquement mathématique. Elle n'est pas courante. On ne peut compter sur « la vie de tous les jours » pour lui donner un sens. Les représentations que l'on peut faire d'une telle expression constituent ce qu'on appelle « le langage intérieur mathématique ». Ces représentations permettent de faire le pont entre le problème posé et sa solution. K. a utilisé deux types de représentations :

1. Une représentation spatiale :



2. Une représentation numérique :



Si la première représentation semble plus près des objets concrets, remarquons qu'elle met surtout en évidence une structure, tout comme la seconde. Ce type de représentation est ce que nous appelons une représentation mathématique dont nous précisons les caractéristiques dans la rubrique « faisons le point ».

Enseigner les mathématiques, et en particulier la résolution de problèmes, consiste en grande partie à donner les moyens aux élèves de se construire un langage intérieur. L'autre élément essentiel de cet enseignement est d'amener les élèves à se plonger dans le travail d'évocation du problème pour s'en donner des représentations successives qui vont aller à la rencontre de leur langage intérieur.

Se donner des représentations, avoir à sa disposition un ensemble de représentations que l'on peut tenter d'utiliser, constituent les fondements de la résolution de problèmes. On stérilise complètement l'activité mathématique en donnant trop de « solutions toutes faites » au lieu d'insister sur la construction de représentations. Il est donc essentiel de préciser les modalités de ce travail de représentation.

FAISONS LE POINT

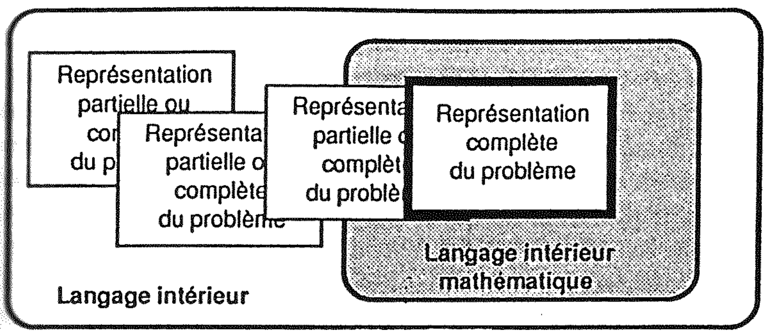
Résoudre un problème consiste à s'en donner des représentations successives dont certaines peuvent être partielles, jusqu'à ce que ces représentations coïncident avec des représentations familières qui forment « le langage intérieur mathématique » de chacun.

Les représentations successives peuvent l'être parce qu'elles concernent un problème plus simple, ou analogue, ou simplement une partie du problème.

Quand aucune représentation familière ne correspond aux représentations partielles ou complètes du problème, le travail de représentation va se poursuivre jusqu'à ce que la solution paraisse évidente.

Les représentations successives dépendent surtout de deux éléments :

1. les habitudes évocatives, qui déterminent largement la forme des représentations obtenues – c'est l'objet du chapitre suivant ;
2. le langage intérieur qui oriente les représentations du problème vers des représentations familières.



Sur ce schéma, nous avons figuré les représentations successives du problème, résultat d'un travail d'évocation. Les représentations intermédiaires se rapprochent des représentations familières constituant le langage intérieur mathématique. Une de ces représentations correspond finalement à une représentation du « langage intérieur mathématique ». C'est la solution.

Le langage intérieur mathématique est constitué par des représentations, devenues familières, et ayant les caractéristiques suivantes :
1. elles expriment des structures ;
2. elles peuvent être de nature spatiale, verbale ou numérique ;
3. elles sont interreliées ;
4. elles sont ouvertes ;
5. elles sont complexes pour être assez riches ;
6. elles constituent un langage.
Pour résoudre des problèmes, il faut avoir à sa disposition un langage intérieur mathématique important.

Apprendre à résoudre un problème demande donc :
1. d'apprendre à représenter un problème à travers ses propres habitudes évocatives ;
2. d'enrichir le langage intérieur mathématique.
Ces deux conditions ne sont pas suffisantes.

L'absence ou la faiblesse de l'évocation entraîne l'incapacité à résoudre des problèmes

Sans évocation, il n'y a pas de résolution de problèmes possible, car l'énoncé ne parvient même pas à la conscience de celui qui devrait le résoudre. Or, parmi les élèves en difficulté, nombreux sont ceux qui n'évoquent pas, soit parce qu'ils ne sont pas en classe dans une situation où ils peuvent le faire, soit parce qu'ils ne savent pas comment évoquer.

L'apprentissage de l'évocation peut être rapide : c'est le cas de quelqu'un qui réussit déjà dans un certain domaine. Nous avons donné de tels exemples. Ce peut être long dans le cas où l'évocation est tellement inhabituelle ou partielle qu'il faudra prévoir une suite d'activités progressives et systématiques en dehors des cours traditionnels.

Comment développer les capacités d'évocation des élèves pour améliorer leur capacité de résolution de problèmes ?

Voici deux points à développer pour améliorer les capacités de représentation des élèves éprouvant de grandes difficultés à résoudre des problèmes. Dans la plupart des cas, il est possible de le faire pendant le cours de mathématiques. Par contre, dans d'autres cas, il faudra prévoir des activités spécifiques et systématiques en dehors de tout cours traditionnel pour développer les capacités d'évocation quand elles sont particulièrement faibles.

On cherche ici à développer des moyens qui vont leur permettre d'aborder la résolution de problèmes. Ces moyens ne sont pas suffisants pour résoudre des problèmes, mais ils sont indispensables pour pouvoir commencer à apprendre à résoudre des problèmes. Nous avons observé que les élèves en difficulté n'avaient pas ces moyens à leur disposition.

1. *Connaître et apprendre à utiliser ses capacités d'évocation pour imiter et reproduire* [3]

Tout apprentissage comporte une part importante de reproduction et d'imitation. Sans cette capacité à reproduire et à imiter même à court terme, rien ne reste. Reproduire veut dire redire un énoncé entendu, un texte lu, refaire un dessin ou un schéma de mémoire, refaire un geste vu, reproduire un déplacement. Nous avons vu qu'un individu peut réussir facilement certaines reproductions, et en trouver d'autres beaucoup plus difficiles. Le travail d'initiation à la reproduction et à l'imitation doit se faire en relation avec la prise de conscience individuelle des bons gestes mentaux. Cet apprentissage sera réussi si l'élève est capable de se donner à la fois l'objectif à atteindre (reproduire, imiter), mais aussi les moyens mentaux de l'atteindre.

On peut commencer simplement par la mémorisation à court terme de textes, de schémas ou de gestes et d'actions dans le seul but de les reproduire. Il faut bien distinguer le moment où l'on observe de celui où l'on fait la reproduction, soit les temps de perception, d'évocation, de rappel de ce qui a été évoqué.

Il ne suffit donc pas de donner des techniques, mais il faut aussi que l'élève reconnaisse ses propres moyens, les utilise et les développe. L'élève doit avoir l'impression de se trouver dans un laboratoire où il peut expérimenter ses moyens d'apprendre et les développer.

---

3. En employant le langage des paramètres, il s'agit de développer le P1.

Le mime, le dessin d'imitation, l'apprentissage de la danse sont aussi des activités qui obligent l'évocation et qui permettent d'en comprendre les modalités personnelles. Ces activités de ce genre peuvent commencer dès la maternelle. On pourra se reporter aux deux livres de Betty Edward, *Dessiner avec le cerveau droit* et *Vision, dessin, créativité* [4], et au livre de Joëlle Gonthier, *Dessin et dessein* [5], pour comprendre ce que peut être une véritable éducation du regard.

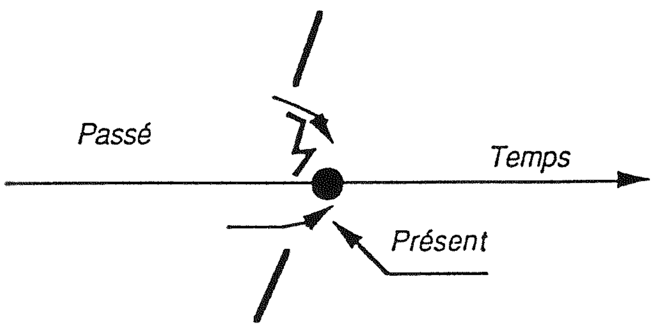
2. Apprendre à évoquer des relations [6]

Les mathématiques s'appuient sur un langage particulier exprimant des relations et des structures. Ce langage fait appel aux symboles. Un symbole renvoie toujours à autre chose qu'à lui-même. Quand on dessine une flèche, cette flèche peut indiquer une direction, mais aussi une relation entre deux objets, une transformation, un lien. Une flèche peut aussi représenter un concept : on peut représenter le temps par une flèche. Il faut donc apprendre à évoquer un langage symbolique, qui peut être schématique, mais qui peut aussi être verbal. Il faut donc apprendre à charger de sens des symboles, des mots, des représentations. Les élèves en difficulté ne pratiquent généralement pas ce genre d'évocation.

L'imagination, la créativité peuvent être des moyen de donner un sens à des symboles et des relations [7] : à la fin d'un problème, on peut inventer des représentations du problème et de sa solution. Mais on peut aussi imaginer des symboles représentant des concepts variés rencontrés par exemple en histoire, en économie, en français. On peut aussi expliquer une phrase par un schéma. La phrase sui-

4. Pierre Mardaga éditeur.
5. ESF éditeur.
6. En employant le langage des paramètres, il s'agit de développer le P3.
7. En employant le langage des paramètres, on développe le P3 en passant par le P4.

vante, tirée du premier texte (voir chapitre 1) : « Il revivait maintenant trop souvent des moments révolus de son propre passé, non par regret ou nostalgie, mais parce que les cloisons du temps semblaient avoir éclaté », peut se représenter de cette façon :



On voit que la cloison qui isole irrémédiablement le passé du présent a éclaté et que le passé se trouve à submerger le présent.

On peut imaginer d'autres représentations, dont certaines peuvent être plus ou moins fantaisistes. L'imagerie créée peut devenir de plus en plus symbolique. Ce travail peut commencer dès les premières années de l'école primaire, et même dès la maternelle.

La création de langage symbolique, de codage, le décodage de formules mystérieuses, toutes ces activités concourent à donner l'habitude de traduire, de transformer des relations. Une fois le décodage ou l'encodage effectué, il faut en parler, le décrire, faire des liens verbaux avec d'autres codages. Il faut ensuite prendre le temps d'évoquer ces codages, c'est-à-dire associer mentalement plusieurs façons de dire la même chose.

Insistons sur l'importance de ces deux types d'évocation.

La première permet simplement de prendre conscience de la réalité concrète, ce qui est indispensable. La seconde développe la capacité de représenter symboliquement et de traduire d'une forme dans une autre, ce qui est indispensable en mathématiques, d'une part pour comprendre le langage mathématique et d'autre part pour transformer la forme des énoncés mathématiques. C'est bien souvent en changeant la forme des énoncés mathématiques que l'on met la solution en évidence.

MODALITÉS DE TRANSFORMATION DES REPRÉSENTATIONS D'UN PROBLÈME

Pour résoudre un problème, il faut faire évoluer la représentation initiale vers d'autres représentations plus familières. Il faut donc faire évoluer la première représentation. Les diverses façons de faire ces transformations correspondent à des stratégies de résolutions différentes. Ces diverses stratégies sont intimement reliées aux habitudes d'évocation. Nous allons donner des exemples de transformations des représentations de divers problèmes et en tirer un certain nombre de lois générales permettant de comprendre les difficultés d'un élève et suggérant des méthodes d'intervention adaptées.

Les liens entre les modalités de l'évocation, la nature des représentations obtenues et les stratégies de résolution de problèmes.

La diversité des modalités d'évocation d'un même problème va conduire à des représentations différentes, donc à des solutions différentes. L'aide qu'on apporte à un élève doit s'insérer dans sa démarche, sinon on brise son élan et on lui indique sans le dire que son premier mouvement est toujours le mauvais. Il ne s'agit donc pas de classer les élèves en « auditifs » et « visuels », mais simplement de reconnaître des démarches différentes et de faire le lien entre le mode d'évocation et le choix de la stratégie.

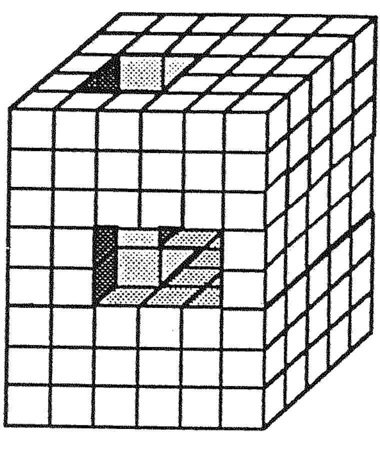
Un élève dit « visuel » peut utiliser une démarche dite « auditive » et réciproquement. Quand il le fait, il change aussi de mode d'évocation.

Enfin, quand on a mis en évidence les caractéristiques de chaque type de solution, on peut imaginer des solutions « auditives » et « visuelles » au même problème, ce qui élargit considérablement le champ de la recherche et offre un éventail de solutions très intéressant.

Tous les exemples qui suivent sont tirés d'entrevues passées avec des élèves de la fin de l'élémentaire et du début du secondaire (9-14 ans).

Problème 1

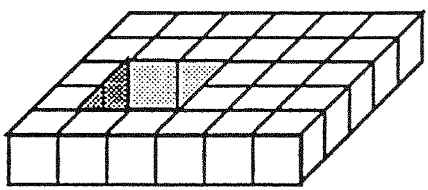
Le problème est de déterminer le nombre de petits cubes contenus dans ce solide : le solide est plein et il est traversé de deux tunnels, l'un vertical et l'autre horizontal.



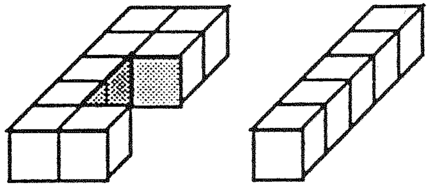
La première difficulté est de se donner une représentation mentale de ce solide, représentation qui n'est pas obligatoirement la photographie mentale de la représentation ci-dessus.

Évocation verbale

L'évocation verbale s'appuie sur des descriptions, des actions faites ou imaginées et s'inscrit dans le temps. Une première évocation verbale peut consister à raconter comment construire ou démonter le solide. Par exemple pour démonter ce solide, je dois d'abord enlever une première plaque, horizontale, ensuite une seconde plaque et une troisième. Ces trois plaques sont identiques et je peux les représenter :



Ensuite je vais démonter le solide en enlevant deux plaques identiques à celle-ci :



On va poursuivre le démontage en enlevant les deux plaques restantes qui sont les mêmes que les premières.

Au lieu de raconter comment démonter le solide, on peut au contraire raconter comment construire le solide. On s'appuie donc sur un algorithme qui permet de « voir » chacune des pièces du solide.

Voici une autre façon d'évoquer verbalement le solide : J'imagine le solide plein et j'imagine que l'on creuse le tunnel vertical. J'enlève 4 cubes à chaque plaque verticale. J'imagine ensuite que je creuse un tunnel horizontal. Je commence par enlever 6 cubes à la première couche verticale, puis 6 cubes à la seconde. On n'enlève plus que 4 cubes aux deux suivantes, et on recommence à enlever 6 cubes aux dernières couches verticales.

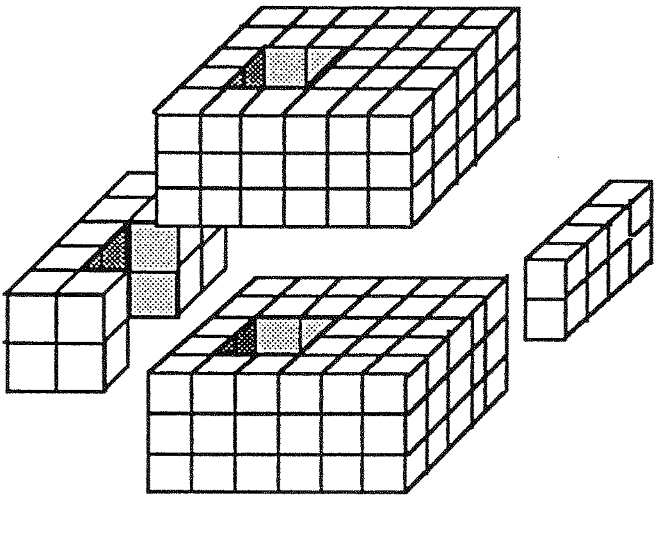
Évocations visuelles du même problème géométrique

On peut se contenter de décrire le solide sans imaginer aucune action : « Dans ce solide, il y a deux tunnels. Ces tunnels se croisent et il y a là un problème. Il est possible de déterminer le nombre de cubes communs à ces deux tunnels. Une formule donne le nombre de cubes du solide plein. Il est possible aussi de calculer le nombre de cubes correspondant à chaque tunnel et le nombre de cubes qui sont communs à ces deux tunnels. Un peu de logique donnera la réponse. »

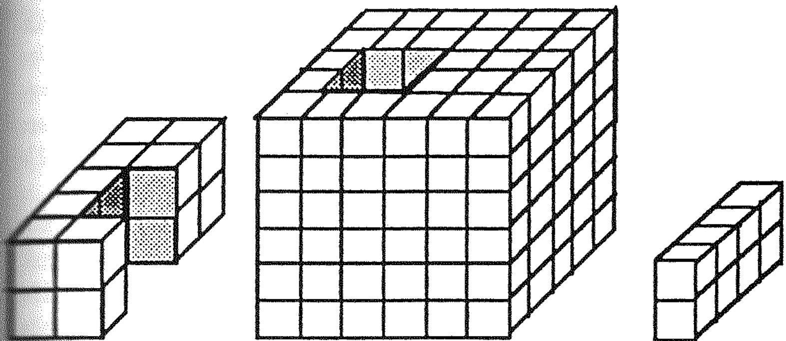
Cette façon de décrire le solide, neutre et apparemment « objective », n'est souvent que le résultat de manipulations mentales, souvent visuelles.

L'évocation visuelle ne se place pas dans le temps : un visuel va dire que le puits vertical est obtenu en enlevant 4 colonnes de 8 cubes et que le tunnel horizontal est obtenu en enlevant 6 barres de 5 cubes, mais il n'imagine pas qu'il enlève d'abord les colonnes verticales, ce qui fait que les barres horizontales sont intactes. Le problème des cubes communs aux deux tunnels sera envisagé ensuite. Un élève auditif, s'il dit que les quatre colonnes verticales sont enlevées, en tient compte quand il parle ensuite des barres horizontales qui se trouvent alors modifiées.

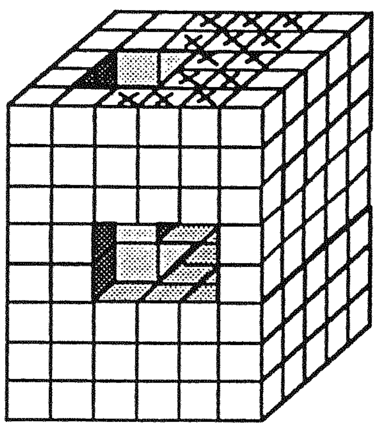
Voici une autre façon d'évoquer le solide. Le solide est éclaté : celui qui l'évoque de cette façon n'imagine aucun mouvement, aucune transformation. Il a toujours tout le solide sous les yeux. L'évocation consiste simplement à distinguer des parties dans ce solide pour que la vue globale puisse mieux s'exercer.



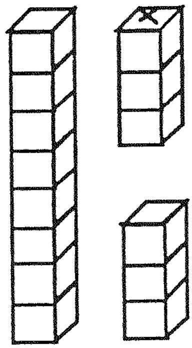
Certains auditifs se donnent une représentation très voisine : ils imaginent que les « murs de côté du tunnel horizontal s'effondrent ». Il ne reste plus qu'un solide avec un seul tunnel vertical. On calcule facilement le nombre de cubes nécessaires. Il suffit ensuite d'ajouter les cubes servant à la construction des parois latérales.



Voici une autre évocation visuelle du même solide :



Simplement en plaçant une croix sur certains faces des cubes, on met en évidence deux sortes de colonnes : l'une formée de 6 cubes et les autres de 6 cubes seulement.



La figure ci-dessus précise pour ceux qui ne l'auraient pas vu que, sous une croix, il y a une colonne de 6 cubes et que lorsqu'il n'y a pas de croix, il y a 8 cubes. Il suffit donc de compter les croix et de multiplier par 6, et de compter les faces apparentes sur le dessus du solide et de multiplier par 8. La croix met en évidence une différence entre deux types de colonnes. Le temps n'intervient plus, au contraire, tout apparaît en même temps. La solution constitue un raccourci.

Une évocation visuelle conserve tous les éléments du problème sans faire intervenir le temps. Elle consiste souvent à rajouter des éléments sur la figure pour mettre en évidence des éléments communs ou des différences comme dans le dernier cas : la petite croix met en évidence une différence entre deux types de colonnes.

Reprenez maintenant chaque type d'évocation du solide et, à partir de là, faites le calcul donnant le nombre de petits cubes composant le solide : vous aurez chaque fois un calcul différent. Dans les cas des décompositions verbales, chaque étape du calcul va correspondre à une étape de la décomposition du solide : sur la première plaque, il y a 32 cubes, sur la deuxième couche il y a aussi 32 cubes, etc. Dans le cas d'une décomposition visuelle, le calcul va s'appuyer sur le comptage et sur des relations visibles « d'un seul coup d'œil ». Dans le dernier cas, on compte le nombre de croix (13) et le nombre de faces non marquées (13). On a donc (13 x 6) + (13 x 8) petits cubes.

Les enseignants utilisent souvent des formules pour trouver le résultat et tendent à imposer cette façon de faire à leurs élèves. Or le travail d'évocation que nous venons de décrire est indispensable pour s'approprier le solide et lui donner une structure. Si on court-circuite cette étape, on se coupe du sens. Les formules peuvent être utilisées, mais après, pour accélérer le calcul.

Le processus d'évocation consiste dans un premier temps à se donner avec le plus de précision possible une représentation mentale d'un objet externe. Comme on peut le constater sur l'exemple précédent, la nature de l'objet externe ne conditionne pas absolument les modalités de l'évocation. Nous sommes ici en présence d'un objet géométrique qui peut être évoqué verbalement aussi bien que visuellement. Les habitudes évocatives de celui qui évoque vont d'abord déterminer les modalités de l'évocation beaucoup plus que la nature même de l'objet évoqué. D'autre part, la solution au problème va dépendre directement de l'évocation qui en est faite. Il est donc impossible d'aborder les « stratégies de résolution de problème » sans tenir compte des habitudes évocatives de ceux qui les résolvent.

L'exemple précédent met en évidence une différence d'une importance capitale selon les modalités de l'évocation : le rôle assigné au temps par celui qui pratique une évocation visuelle ou une évocation auditive.

FAISONS LE POINT :

Indépendamment de la nature du problème :
– On peut évoquer en se plaçant dans le temps, en traduisant sous forme d'actions, de processus. On imagine que l'on agit, que l'on transforme. Nous dirons que ce type d'évocation est verbal ou auditif.
– On peut aussi évoquer en se plaçant dans l'espace. On compare, on met en évidence des différences, on tente de placer toutes les données sur la même figure pour tout voir d'un seul coup d'œil, on effectue une réorganisation spatiale. Nous dirons que ce type d'évocation est visuel.

EXEMPLES DE RÉSOLUTIONS VISUELLES ET VERBALES

Problème 2

Des jeunes font un spectacle et vendent des billets. Certains de ces billets valent 3 $, d'autres 4 $. Le montant de la vente est de 78 $ et ils ont vendu 22 billets. Combien ont-ils vendu de billets à 4 $ et de billets à 5 $?

Solution verbale

Une première évocation verbale du problème va consister à prendre conscience du déroulement temporel des actions : l'élève, s'il se situe en première personne, peut s'imaginer vendeur de billets. Il vend des billets sur le comptoir, certains valent 3 $, d'autres 4 $. Des clients arrivent et achètent l'un ou l'autre des billets. L'élève imagine cette scène et se la raconte. Ensuite, il va associer les nombres 22, 3, 4 et 78 au problème qui est maintenant bien évoqué sous la forme d'une petite séquence. Les relations entre les nombres intervenant dans le problème découlent de la séquence temporelle évoquée. C'est le contexte qui induit le sens.

Un type de solution verbale consiste à se donner un nombre de billets vendus à 3 $ et un nombre de billets vendus à 4 $, à évaluer le résultat et à le modifier peu à peu pour parvenir au résultat. La difficulté provient du fait que de nombreux élèves vont continuer à procéder empiriquement, faire des essais jusqu'à ce qu'ils tombent directement sur la solution.

Par exemple, ils vont commencer par imaginer que 10 billets à 4 $ ont été vendus. Si 10 billets à 4 $ ont été vendus, il faut que 12 billets à 3 $ soient vendus : le montant obtenu est alors de 76 $, ce qui est insuffisant. Ils vont tester une autre hypothèse. Il faut obtenir un montant plus élevé, il faut donc plus de billets à 4 $, essayons 14 : $14 \times 4 = 56$ et $3 \times 8 = 24$, le total fait 80, ce qui est trop, etc., jusqu'à la découverte du bon montant.

Cette démarche demeure largement empirique : comment aider un élève verbal à se comporter plus logiquement ? Une de ses difficultés provient de ce qu'il utilise souvent très mal la feuille de brouillon et qu'il n'en retient que la petite partie qu'il est en train d'écrire. Il écrit d'ailleurs un peu n'importe comment sur cette feuille, à droite, à gauche, en haut, en bas. Il ne fait donc pas facilement le lien entre ce qu'il écrit à deux moments différents. Il va souvent oublier une donnée importante en route, par exemple le nombre total de billets vendus. Ou encore, il va transformer le problème et en résoudre un autre. Il faut l'aider à faire des rapprochements tout en respectant l'approche itérative qui est la sienne.

On peut lui conseiller de remplir un tableau :

B	4	3	M
22	20	2	86

Il va commencer par un nombre qui lui paraît raisonnable : ici 10 billets à 4 $. Beaucoup vont remplir ce tableau sans faire de liens entre chaque ligne. Ils ne peuvent pas faire de liens s'ils font varier à la fois tous les éléments du tableau. On peut leur conseiller de bloquer une variable, par exemple le nombre de billets (22). Cela fait, on fait une autre tentative. Un autre conseil est de faire varier assez peu une variable et de comparer les deux montants correspondants.

B	4	3	M
22	20	2	86
	21	1	87

Il faudra peut-être d'autres tentatives pour constater que le montant augmente avec le nombre de billets à 4 $. On va donc faire diminuer le nombre de billets de 4 $ vendus pour s'approcher pas à pas de la solution.

B	4	3	M
22	20	2	86
22	21	1	87
22	15	7	81
22	14	8	80
22	13	9	79
22	12	10	78

Sur un tableau, certains vont voir qu'en remplaçant un billet à 4 $ par un billet à 3 $, le montant total va diminuer de 1 $. Or, avec 20 billets à 4 $, il y a 8 dollars de trop. Il faut donc avoir 8 billets de moins à 4 $, soit 12 billets. Le raisonnement devient logique.

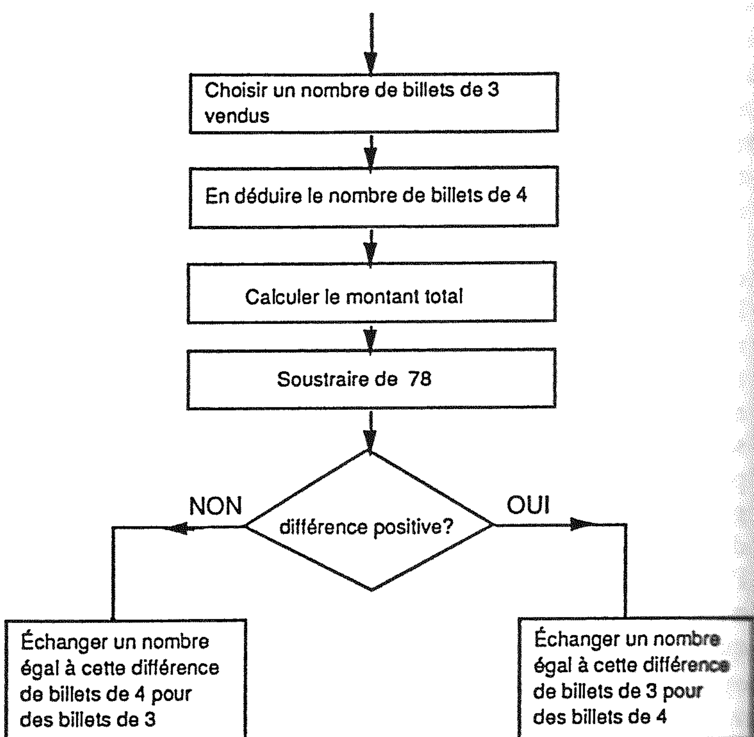
Certains élèves auditifs vont d'ailleurs s'intéresser beaucoup plus à la recherche d'une méthode de résolution logique et générale plutôt qu'au résultat lui-même. On retrouve là cette caractéristique de nombreux élèves auditifs de s'intéresser plus à l'aspect théorique qu'au résultat numérique. Pour eux, la « vraie » solution au problème ne sera pas le résultat numérique mais la démarche logique qui peut y conduire. Ils se placent dans la situation d'un programmeur qui ne cherchent pas la situation particulière d'un problème, mais une démarche programmable telle que l'ordinateur pourrait résoudre le problème. La solution n'est pas numérique, mais c'est un algorithme. Dans le cas qui nous occupe, on aurait l'algorithme suivant :

– choisir un nombre de billets de 4 $ vendus ;
– en déduire le nombre de billets de 3 $ vendus ;

– calculer le montant total ;
– calculer la différence avec 78 $;
– si la différence est positive, échanger un nombre égal à cette différence de billets de 4 $ pour des billets de 3 $;
– si la différence est négative, échanger un nombre égal à cette différence de billets de 3 $ pour des billets de 4 $.

Cet algorithme se caractérise par le fait qu'on choisit une solution au hasard et que l'on se rapproche ensuite de la solution pas à pas, mais le plus vite possible. De nombreuses méthodes développées en calcul numérique procèdent de cette façon. Il ne s'agit donc pas de mauvaises façons de résoudre un problème, bien au contraire.

On peut maintenant représenter visuellement l'algorithme précédent :



C'est un schéma auditif qui représente instantanément un déroulement d'action matérialisé par les flèches et les choix possibles.

Bien souvent, les élèves oublient le contexte pour ne garder que des nombres : 3, 4, 22, 76. Autant cette abstraction aide les visuels à se placer dans un contexte intemporel, autant cette désincarnation trouble les auditifs et les conduit à avoir un comportement mécanique et absurde.

Ce genre de solution ne convainc pas du tout le visuel, qui répugne à partir un peu au hasard de cette façon, et surtout qui trouve ce type de solution trop long. Si on lui a dit auparavant que c'est ainsi qu'il faut procéder, il le fera sans doute, mais c'est une méthode vers laquelle il n'ira pas lui-même.

Solution visuelle

Voici une démarche suivie par de nombreux élèves visuels.

Après avoir rapidement évoqué visuellement des billets, un local, il va vite résumer le problème devant lui : 3 $, 4 $, 22 billets, 78 $.

Très vite le contexte va disparaître et il ne restera plus que des nombres : 3, 4, 22, 78.

Voici un exemple de résolution : P. cherche à voir la solution, le plus rapidement possible. Il écrit :

$3 \times 22 = 66 \longrightarrow 78$
$12 \times 4 = 48 \longrightarrow 30 \quad 10 \times 3$
12 à 4, 10 à 3

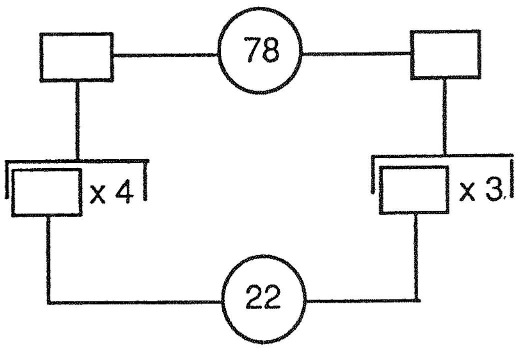
Il donne la réponse et est incapable d'expliquer pourquoi, car ça lui est venu « tout d'un coup ».

Il a commencé par faire un calcul $3 \times 22 = 66$. Il ne pense déjà plus à des billets, mais il ne voit que des nombres. De la lecture de l'énoncé, il a gardé qu'il faut trouver 78, mais la justification de cette nécessité a déjà disparu.

Il manque 12 pour aller à 78. Il fait le calcul 12 × 4 = 48 et ajoute 10 × 3 parce qu'il obtient 78 de cette façon. Le calcul 12 × 4 est un essai qui ne se justifie pas par un raisonnement. Le 12 était là, il s'en est servi. Il a trouvé la solution parce qu'il avait devant lui tous ces nombres et il a tenté de les agencer de façon à tomber sur la solution.

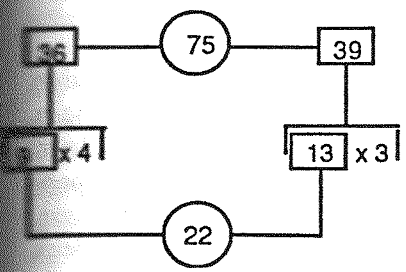
La disparition du contexte dans l'esprit de P. fait qu'il ne lui reste que des relations numériques, d'où sa difficulté à revenir au problème.

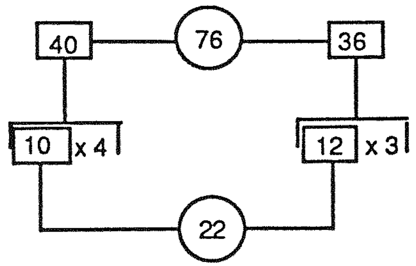
Le schéma suivant correspond tout à fait à la méthode de résolution visuelle du problème :

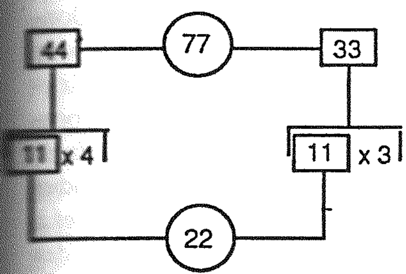


Il s'agit simplement de placer dans les carrés les nombres qui conviennent. On voit d'un seul coup tous les nombres et la structure générale. On peut faire appel à des considérations sur la parité (il faut que le facteur de 3 soit pair). Comme 78 n'est pas un multiple de 4, le facteur de 3 n'est pas un multiple de 4. La recherche de la solution est d'une nature totalement différente de la recherche auditive.

Un moyen d'amener un visuel à pénétrer le sens du problème est de placer devant lui les trois schémas suivants et de lui demander d'observer les différences :







En comparant les trois tableaux, on voit que si l'on augmente de 1 le facteur de 4, on diminue de 1 le facteur de 3 et on augmente de 1 le résultat. Ce tableau ne réfère à aucune réalité, aucun contexte. Il n'y a plus qu'une structure numérique que l'on explore. Une fois cette structure mise en évidence, il faudra revenir au problème réel et faire le lien entre ce problème et la structure numérique.

La caricature de l'élève auditif et de l'élève visuel en train de résoudre un problème

Jouons à donner les caractéristiques d'une évocation visuelle et d'une évocation auditive : bien sûr, ces deux descriptions ne doivent pas être prises comme absolues, c'est pour cela que nous parlons de « caricature ». Cependant, la probabilité est forte que vous ayez dans une classe, quel qu'en soit le niveau, des élèves fort près de ces deux descriptions.

Il serait absurde de vouloir attribuer à une personne donnée toutes les caractéristiques visuelles ou auditives que nous allons mentionner. Ce serait imposer une classification abusive, figer un individu dans un carcan insupportable et irréel. Par contre, avoir en tête une telle classification, savoir qu'on doit respecter ces deux types d'individus tellement différents, conduit à être à l'écoute de l'autre et à respecter les différences. Il faut les considérer comme des données à partir desquelles il nous faut bien construire une pédagogie qui fasse évoluer les uns et les autres.

Tout problème peut être abordé sous un angle auditif ou sous un angle visuel. À partir des caractéristiques des deux types de solutions, on élargit largement les méthodes d'approche et de résolution.

L'élève auditif et la résolution de problèmes

L'évocation auditive ou verbale est séquentielle et s'inscrit toujours dans le temps. Celui qui évoque auditivement ou verbalement a besoin de temps pour envisager tous les aspects du problème. Il commence par structurer le déroulement du problème dans le temps. Il n'a pas peur des solutions qui vont demander du temps, qui vont le conduire pas à pas vers la solution. Il trouve des solutions de type itératif.

Il va accepter l'erreur assez facilement comme étant la marque d'un apprentissage incomplet. Il va aimer avoir l'énoncé du problème sous les yeux pour prendre tout le temps qu'il faut pour en extraire le sens. Si on exige une solution immédiate, on le déstabilise et il risque de s'enfermer dans une sorte de mutisme. Il faut lui donner le temps d'y arriver. Il s'intéresse peu aux détails, peu à la forme, mais au fond, au sens, aux idées. Il va donner beaucoup d'importance au contexte dans lequel sont situés les problèmes. Il va accepter d'agir et de réfléchir ensuite sur cette action. À partir du concret, il va aimer construire une théorie. Celui qui évoque auditivement veut se donner lui-même sa stratégie de résolution du problème : il va écouter vos explications et vos suggestions avec l'intention d'en faire à sa tête. Par contre, de parler sur un problème va l'amener à en prendre conscience. Le simple fait de raconter le problème à quelqu'un d'autre lui permet souvent d'amorcer la solution. Quand un auditif vient vous demander une explication en vous disant qu'il ne comprend pas, demandez-lui de vous expliquer ce qu'il ne comprend pas. Il commence et tout d'un coup au milieu du discours, il vous dit : Ah oui, ça y est ! Il vous dit merci et s'en va ; pourtant vous n'avez rien dit !

On l'aide en lui donnant des moyens d'ordonner sa démarche, d'améliorer la présentation des données, en lui donnant un vocabulaire précis.

L'élève visuel et la résolution de problèmes

L'évocation visuelle cherche à se situer dans le présent : elle ignore le déroulement du temps. Le visuel attend qu'on lui présente toutes les données d'un problème, de façon la plus schématique possible. Il devra apprendre à rassembler sur une même figure toute l'information obtenue au cours de la résolution du problème.

Au lieu de déduire, le visuel va faire des rapprochements ou encore mettre des différences en évidence. Une solution demandant de nombreuses étapes le rebute. Il cherche des raccourcis.

Au début d'un cours, il faut lui en donner le cadre, donner des repères, montrer où l'on va.

Il veut des exemples, des solutions à court terme. Il veut qu'on lui donne des techniques rapides de résolution des problèmes sans avoir besoin d'en connaître la raison. Il préfère souvent savoir appliquer qu'expliquer. Un visuel demandera une explication rapide, donc orale bien que cela puisse paraître paradoxal. Avant même la fin de l'explication, on le voit de nouveau tenter d'exhiber la solution. Ensuite, il va revenir et demander à voir ! Il veut agir et trouver la solution tout de suite. L'échec lui fait mal et il ne le supporte pas.

Il va masquer ses erreurs et est peu porté à les considérer comme une occasion de réflexion. Il va attacher beaucoup d'importance aux détails. Il peut paraître extrêmement bavard : parler ne l'aide pas à trouver une solution, mais simplement décrire ce qu'il voit, ou à donner le change et masquer son inquiétude. Les mots ne l'engagent pas et, aux oreilles d'un auditif, il peut quelquefois donner l'impression de dire n'importe quoi ! En classe, il a tendance à être « bavard » et à interrompre un cours pour réagir immédiatement.

Quand il ne trouve pas tout de suite la solution à un problème, il vient vous dire : je ne comprends rien, en insistant sur le rien. Demandez-lui alors de faire un schéma qui va vous permettre de comprendre visuellement ses difficultés. Il faudra sans doute l'amener à voir un lien qui lui échappe, lui donner un exemple ou un contre-exemple. Une fois le travail fait, il n'aura pas envie de revenir sur ce qu'il vient de faire et de dégager des principes plus théoriques, contrairement à l'auditif. Il veut passer à autre chose.

FAIRE ET SE REGARDER FAIRE LE DIALOGUE ENTRE L'ORGANISATEUR ET L'EXÉCUTANT

Ceux qui résolvent des problèmes reconnaissent en eux deux personnages :

– Le premier a des connaissances. Il sait calculer, connaît des techniques, sait résoudre des exercices. Il sait refaire, reproduire : c'est l'exécutant.

– Le second oriente le travail, l'organise, décide, évalue les résultats obtenus. Il pose des questions. Il se voit faire, se juge, s'évalue. Il connaît les moyens dont il dispose et cherche à les développer : c'est l'organisateur.

Très souvent, l'exécutant prend toute la place. Il survole l'énoncé pour commencer à exécuter des calculs. Il veut terminer très vite et, parvenu à la fin du calcul, ne pense même pas à prendre en compte la vraisemblance de ses résultats.

Un organisateur sans exécutant est impuissant : il ne peut trouver aucun résultat, n'a aucun savoir-faire.

Si on reprend l'entrevue de K., on constate que l'organisateur est absent chez elle. Alors l'enseignant lui pose des questions : il supplée cette absence par ses questions qui orientent son action. Il lui donne une ligne de conduite. Il joue le rôle de l'organisateur. Mais s'il se borne à jouer ce rôle sans amener l'élève à prendre conscience de ce personnage et de la nécessité de l'intégrer, les progrès en résolution de problèmes resteront faibles, même si l'exécutant fait des prouesses.

L'organisateur désire se connaître : il veut savoir comment il fait pour apprendre, pour mémoriser, pour comprendre. C'est donc l'organisateur que l'on développe à partir des exercices de gestion mentale décrits dans les premiers chapitres. Il prend conscience de ses moyens.

Ayant ces connaissances en lui même, il les utilise quand il le faut. Au moment de la lecture de l'énoncé, c'est lui qui décide de faire la lecture de l'énoncé jusqu'à ce que la compréhension se fasse. C'est l'organisateur en J. qui lui a fait écouter, puis écrire, puis redire, puis transformer le texte en images avant d'entreprendre la résolution du problème. C'est l'organisateur qui décide qu'il faut souvent lire tout l'énoncé avant d'entreprendre la recherche de la solution de la première question.

L'organisateur a à sa disposition une banque de questions et de façons de faire, disons d'heuristiques, pour aborder la recherche d'une solution. Voici quelques exemples de ces questions :

– Est-ce que je peux trouver une représentation spatiale de ce problème ? (Voir les caractéristiques des représentations visuelles.)

– Est-ce que je peux trouver une représentation verbale de ce problème ? (Voir les caractéristiques des représentations verbales.)

– Est-ce que j'ai déjà rencontré un problème semblable ? En quoi ce problème était différent ?

– Sur quel sujet porte ce problème ? Qu'est-ce que je sais de cette question ? (Cette question renvoie aux connaissances de celui qui résout le problème et la représentation de ces connaissances. C'est l'objet de la seconde partie de ce livre.)

– Si je n'arrive pas à résoudre le problème posé, est-ce que je peux imaginer un problème plus simple que je pourrais résoudre et qui me donnerait des idées pour résoudre le problème principal ?

– Si je n'arrive pas à résoudre ce problème, est-ce que je peux en trouver d'autres représentations analogues ?

– Est-ce que je peux faire des essais, tenter des simulations ?

– Comment organiser les simulations pour en extraire des relations ?

– Quelles sont les variables que je dois bloquer, comment faire varier les autres ?

– Comment organiser les données pour les rendre plus claires ?

– Est-ce que je peux voir tout ça autrement, d'un point de vue radicalement différent ? Est-ce que je peux reformuler le tout d'une façon toute personnelle ?

– Le problème étant résolu, est-ce que je peux dire ou schématiser ce que j'ai fait ? À quel moment ai-je eu des difficultés ? Comment ai-je fait pour les surmonter ?

– Comment les autres ont-ils fait ? Est-ce que je pourrais faire comme eux une autre fois ?

Chacune de ces questions doit être adaptée par celui qui va devoir se les poser à ses habitudes évocatives et aux gestes mentaux qu'il effectue le plus facilement et le plus efficacement. À ces questions, d'autres viendront s'ajouter au fur et à mesure que l'expérience s'enrichit. Ces questions ne font qu'exprimer des projets particuliers que l'organisateur envisage successivement.

Faire des progrès dans le domaine de la résolution de problème, c'est former consciemment le projet de résoudre un problème et l'adapter à ses habitudes évocatives. Ce projet doit être précis dans ses modalités. C'est un projet en perpétuelle évolution. C'est le projet, encore une fois, qui va faire en sorte que les connaissances et les capacités potentielles puissent s'exprimer, s'organiser et s'actualiser. Pour que ce projet prenne corps, il faudra que tout ce que nous venons de décrire devienne peu à peu conscient et délibéré. Il va donc falloir en parler, nommer l'exécutant et l'organisateur, et consacrer du temps et de l'espace à l'éducation de chacun de ces deux personnages.

Voici une façon de procéder en classe. On peut demander aux élèves d'avoir un cahier dans lequel ils vont noter tout ce qui concerne « l'organisateur ». En particulier, ils indiqueront :

– Comment ils font pour évoquer, comment ces habitudes évocatives évoluent, comment elles peuvent s'enrichir ?

– Quel est le projet global qu'ils poursuivent ? Est-ce un projet de « faire », d'acquérir une compétence, un projet « d'être » [9]?

– Comment doivent-ils faire pour s'approprier un énoncé ?

– Quelles sont les questions qu'ils doivent se poser tout au long de la résolution du problème ?

– Quelles sont les méthodes de résolution de problème réutilisables ?

– Où se trouvent les difficultés, leur forme, leur nature, leur domaine ?

– Comment procéder pour apprendre une leçon de mathématique, la méthode, l'évocation ?

– Comment procéder pour comprendre une notion nouvelle en mathématiques ?

Ce cahier est personnel. On doit y revenir assez souvent pour que se forme l'habitude de se regarder travailler, de prendre conscience de façons de faire et des différences individuelles, et d'apprendre des méthodes autant que des résultats.

Faisons le point

Résoudre un problème consiste en s'en donner des représentations successives à partir d'une chaîne évocative qui est propre à chaque individu. Un problème est résolu quand on réussit à obtenir une représentation qui rende la solution évidente ou qui corresponde à une représentation familière.

Ces représentations familières concernant les mathématiques forment « le langage intérieur mathématique ».

Les représentations peuvent être de natures verbale, itérative et procédurale. Elles peuvent être aussi de nature imagées, spatiale et globale.

---

9. Voir le chapitre 2, p. 63.

On a tendance à choisir la nature de la représentation en fonction de ses habitudes évocatives.

Pour résoudre un problème, il faut apprendre à utiliser et améliorer ses capacités d'évocation dans deux domaines :

– En apprenant à reproduire et à imiter, donc à améliorer les capacités évocatives correspondantes en évoquant des images, des textes entendus ou lus, des actions et des déplacements [10].

– En apprenant à donner un sens à des représentations symboliques, donc en évoquant des relations quelle que soit la forme dans laquelle elles sont exprimées [11]. L'imagination et la créativité peuvent être des moyens de le faire.

Parfois, dans les cas les plus difficiles, ce n'est pas dans le cours de mathématiques que l'on peut faire ce travail, mais en dehors, à partir d'activités graduées et spécifiques.

Pour résoudre un problème, on doit faire évoluer une représentation donnée vers une autre représentation. Il faut systématiquement apprendre à créer, reconnaître ou utiliser des représentations analogues, équivalentes, plus ou moins abstraites, de natures différentes, correspondant à des chaînes évocatives diverses. Là encore, il sera nécessaire d'utiliser des activités appropriées.

Résoudre un problème nécessite pour celui qui le fait la détermination d'une ligne de conduite, d'un plan d'action. Il faut donc que deux personnages dialoguent à l'intérieur du même individu : l'organisateur et l'exécutant. L'organisateur a une bonne connaissance de lui-même, cherche à l'améliorer et pose des questions tout au long de la résolution du problème. Il a un projet et connaît l'importance de la chaîne évocative et des représentations dans la résolution des problèmes.

---

10. En employant le langage des paramètres, on développe le P1.
11. En employant le langage des paramètres, on développe le P3.

L'organisateur s'éduque au même titre que l'exécutant. La prise en compte du processus personnel de représentation est le point de départ de « l'éducation de l'organisateur ».

L'organisateur considère la résolution d'un problème comme un domaine où il peut réaliser un certain nombre de projets dont il est conscient. Ces projets structurent son action.

VI

Les objets mathématiques, leur évocation et la compréhension en mathématiques

Chaque discipline a des caractéristiques qui lui sont propres. On n'apprend pas la littérature ou l'histoire comme les mathématiques, tout simplement parce que les objets avec lesquels on doit se familiariser sont de natures différentes. De nombreux élèves échouent en mathématique malgré des efforts importants parce qu'ils procèdent de la même façon pour chaque discipline. La méthode peut fort bien convenir à la géographie et conduire à ignorer complètement la nature des objets mathématiques. Les méthodes générales de la gestion mentale peuvent même aggraver des difficultés en raison même de leur efficacité. En intériorisant encore mieux des objets nuisibles à une compréhension mathématique, on va s'éloigner encore plus vite du sens de l'activité mathématique: associer par exemple de façon exclusive la pointe de tarte et la fraction peut bloquer toute compréhension ultérieure. La gestion mentale ne peut être efficace qui si elle porte sur les objets donnant un sens à la discipline étudiée.

Apprendre les mathématiques, c'est apprendre à regarder comme un mathématicien, à parler comme un mathématicien, à se représenter les choses comme un mathématicien, à agir comme un mathématicien, bref tout ce qui différencie les mathématiques des autres disciplines. Un physicien, un chimiste ne regardent pas, n'agissent pas de la même façon. Quand un physicien pose un problème à un mathématicien, ce dernier doit commencer par le traduire dans son langage, à partir des concepts qu'il connaît.

En mathématique, nous pouvons distinguer trois niveaux :

1. les objets mathématiques ;
2. la langue mathématique ;
3. les représentations mathématiques.

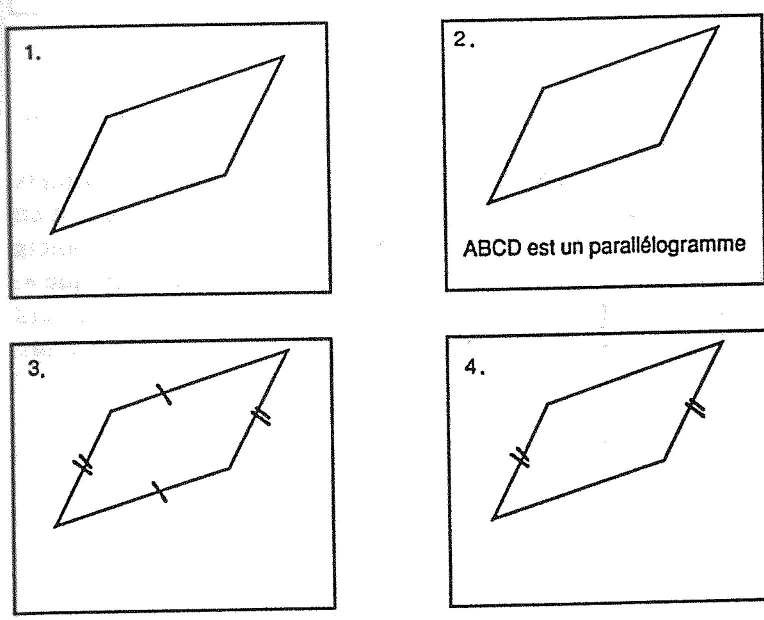
LES OBJETS MATHÉMATIQUES

Ce sont des objets mentaux dans le sens où ils ne se confondent avec aucune représentation concrète. Un trait suggère la notion de droite, mais n'en n'est pas une représentation fidèle. Une flèche est souvent associée à une fonction, mais une fonction ne peut pas se représenter, ne se voit pas, c'est une idée. Un triangle n'a pas non plus d'existence concrète. Quand on dessine un triangle au tableau, c'est pour parler d'un triangle idéal qui seul a une existence mathématique. Le point qu'on représente au tableau cache le point réel tout en le mettant en évidence. Le mathématicien, même le mathématicien en herbe, regarde les objets concrets pour reconnaître des objets mentaux qui sont avant tout des propriétés et des concepts. Ce regard particulier sur le concret est une évocation particulière, l'évocation du mathématicien.

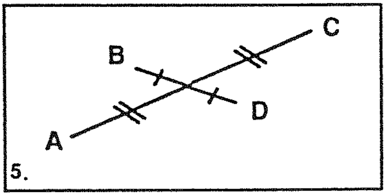
L'ÉVOCATION MATHÉMATIQUE OU L'ŒIL DU MATHÉMATICIEN

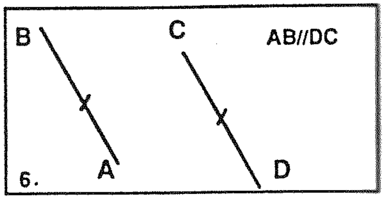
Pour illustrer cette différence entre l'objet concret et l'objet mathématique, prenons l'exemple du parallélogramme.

Ces quatre dessins représentent un parallélogramme pour le « spectateur », c'est-à-dire pour celui qui tente de reconnaître les objets à partir de leur aspect extérieur. Le mathématicien, lui, ne verra pas de parallélogramme sur le premier dessin, il en verra un dans les cas 2 et 3, il n'en verra pas dans le cas 4.



Le mathématicien ne verra un parallélogramme que s'il reconnaît certaines propriétés qui lui permettent d'affirmer qu'il s'agit d'un parallélogramme. Voici par exemple deux cas où le spectateur non mathématicien ne verra aucun dessin évoquant un parallélogramme alors que le mathématicien, lui, en verra un.





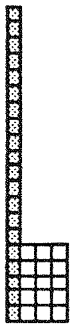
Les figures 5 et 6 constituent un langage et c'est ce langage qui permet de reconnaître le parallélogramme.

Les mathématiques ne se trouvent pas dans les objets concrets, mais dans le regard qu'on porte sur eux. C'est ce regard différent qu'il faut éduquer. Ce regard voit les objets à partir de propriétés. C'est donc loin du regard « optique ». Bien plus, c'est un regard qui ne part pas de l'extérieur vers l'intérieur, mais bien souvent de l'intérieur vers l'extérieur : c'est une projection.

LA PROJECTION DES OBJETS MATHÉMATIQUES

Prenons la figure qui suit, présentée à un élève de 12 ans sachant déjà associer l'opérateur fractionnaire 3/4 à la suite d'une division par 4 et d'une multiplication par 3. Il sait calculer les 3/4 de 12 en divisant 12 par 4 et en multipliant le résultat par 3. Il regarde maintenant cette figure qu'il n'a jamais rencontré auparavant.

$\frac{3}{4}$



Le « spectateur » non mathématicien va voir à gauche l'écriture de la fraction 3/4. Il voit aussi quelques carrés, une colonne plus foncée située à gauche. Il va peut être imaginer un gratte-ciel. Le jeune mathématicien va créer un lien entre l'écriture 3/4 et le schéma. La première colonne représente 20 carrés. La seconde en comprend 5, comme les deux autres. Chacune de ces colonnes représente le quart de la grande colonne et il y a trois petites colonnes. Mais notre mathématicien en herbe ne se fait pas ce raisonnement. « L'idée » lui en vient tout d'un coup ; ensuite seulement il vérifie. Tout se passe comme s'il « projetait » ce qu'il sait de 3/4 sur le dessin. Cette projection réussie, il voit alors les colonnes autrement et d'une façon totalement différente du spectateur non mathématicien.

L'œil du mathématicien projette des structures sur les objets concrets. Quand il réussit cette projection, il « voit » en mathématicien. C'est tout à fait ce que dit Charles Pisot[1] : « Il y a encore des esprits qui n'arrivent pas à se défaire de l'idée que l'espace qui nous entoure n'a pas de géométrie : c'est nous qui mettons une géométrie dans

1. Ancien professeur à Paris-V, cité par J. Nimier, *Entretiens avec des mathématiciens*, IREM de Lyon.

l'espace qui nous entoure.» L'expérimentation peut être un moyen d'éducation de cette projection à condition de la définir comme Pasteur: une observation guidée par des idées préconçues, en d'autres termes, une observation précédée et accompagnée de procédés déductifs. On est bien loin de l'exploration libre qui au contraire éloigne de «l'évocation mathématique».

Les objets mathématiques sont donc des objets mentaux qui tendent à se projeter dans l'espace physique ou dans les objets concrets. Cette projection fait que le mathématicien évoque la réalité d'une manière qui lui est toute particulière: c'est ce que nous appellerons «l'évocation mathématique».

Chaque nouvelle projection d'un objet mathématique dans une situation concrète enrichit et transforme un peu l'objet mathématique tel qu'il était avant la projection. L'objet mathématique tend à s'étendre et à englober de plus en plus de situations concrètes. Par exemple, les sens multiples que l'on peut donner à l'écriture d'une fraction n'ont pas été enseignés, mais sont «reconnus», projetés à partir d'un ou de quelques sens premiers donnés à la fraction Cette dynamique assure la croissance des objets mathématiques. On n'a donc pas en enseigner les 32 sens possibles que l'on peut donner à une fraction, mais simplement associer la fraction à quelques-unes de ces concrétisations et à apprendre aux élèves à projeter l'objet mental ainsi constitué dans des situations nouvelles.

LA LANGUE MATHÉMATIQUE

«Une langue est un système dont tous les termes sont solidaires, où la valeur de l'un ne résulte que de la présence simultanée des autres.» Cette définition due à Saussure décrit une langue comme un système clos où chaque terme n'existe qu'en fonction des autres. C'est le cas en mathématiques où chaque terme peut être défini en fonction d'autres termes, le tout formant un système cohérent. Il faut évidemment admettre quelques termes comme non définissables. Dans ce système, la soustraction et la multiplication se définissent par rapport à l'addition, la division par rapport à la multiplication sans avoir à se référer, semble-t-il, à aucune concrétisation. Il y a une forme de compréhension des mathématiques s'appuyant uniquement sur le langage. Cette forme de compréhension n'est pas réservée à des élèves dits forts, bien au contraire. Certains élèves sont en difficulté parce qu'on ne leur permet pas un accès privilégié aux mathématiques par la langue mathématique.

Si chaque mot de la langue mathématique renvoie à d'autres mots, cette langue décrit parfaitement des objets mathématiques qui sont des objets mentaux. C'est là que réside une des grandes forces de la langue mathématique. Elle nous donne accès aux idées mathématiques qui ne sont pas accessibles à nos sens. L'écriture mathématique a/b résume toutes les facettes de l'objet mathématique « fraction a/b » dont on peut donner de nombreuses représentations concrètes. Mais aucune des représentations concrètes ne peut réunir toutes les interprétations possibles de la fraction. En même temps que la représentation concrète explicite une propriété particulière de l'objet mathématique, elle cache les autres et peut bloquer la compréhension de l'objet mathématique si on en reste là. Une des caractéristiques d'un terme mathématique est de pouvoir désigner des objets concrets différents.

Il ne faudrait pas en déduire que cette langue doit être rigide. Une grande fécondité de la langue mathématique est de pouvoir exprimer différemment la même chose. C'est par cette forme de radotage que la solution souvent apparaît : résoudre une équation n'est qu'une suite de réécritures équivalentes, jusqu'à ce que la phrase mathématique exprime une évidence. La notation choisie est donc d'une grande importance. Il faut apprendre à choisir le « bon » symbole. Il suffit de prendre quelques livres de mathématiques, écrits par des mathématiciens professionnels, pour constater la diversité des notations entourant les fonctions et l'adaptation du symbolisme aux résultats cherchés.

Mais cette langue a un premier défaut : elle ressemble à celle que nous parlons tous les jours. Cette ambiguïté est source de malentendus. Le mathématicien écrit en langue mathématique et son lecteur croit comprendre et comprend autre chose. Dès le début de l'apprentissage commence ce travail de clarification qui passe par la différenciation de la langue courante et de la langue mathématique, différenciation ne voulant pas dire rejet. La langue courante est chargée de sens, il est impossible de l'ignorer, pas plus qu'on peut ignorer que les enfants ont des mains de 10 doigts, qu'ils savent dire la suite des nombres et compter quelques pommes sur la table avant d'aller à l'école primaire.

Dès qu'on parle cette langue à haute voix, des ambiguïtés se glissent : le texte « 12 : 3 » est parfaitement clair : ce texte est mathématiquement équivalent à 4. Mais comment prononcer 12 :3 ? Est-ce 12 divisé <u>par</u> 3 ou 12 divisé <u>en</u> 3 ? Chacune de ces interprétations verbales induit un sens différent. Dans le premier cas, on suggère que 3 est le moyen de la division, c'est-à-dire qu'on va enlever 3 le nombre de fois qu'il faudra pour épuiser 12. On fait donc des paquets de 3, et il y a 4 de ces paquets. Si l'on divise <u>en</u> 3, on fait 3 paquets et chacun de ces paquets vaut 4. Le simple fait de vouloir parler la langue mathématique fait qu'on la quitte pour se retrouver dans un univers plus concret où l'on agit. Donc les mathématiques s'écrivent et c'est seulement écrites qu'elles peuvent décrire parfaitement les objets mathématiques.

Dans cette langue, les nombres jouent un rôle important. D'abord objets familiers servant à compter, il deviennent vite objets d'études, et c'est là qu'ils deviennent objets mathématiques. Les relations qu'ils ont entre eux vont servir de base à des structures plus complexes, puis à la notion même de fonction dont l'importance est essentielle. Le langage développé à propos des nombres va s'élargir et donner son sens au langage algébrique. Les relations numériques sont importantes non pas parce que les mathématiques seraient la science du quantitatif, ce qu'elles ne sont pas ou du moins pas seulement, mais bien parce qu'elles fondent et donnent naturellement un sens à une grande partie de la langue mathématique.

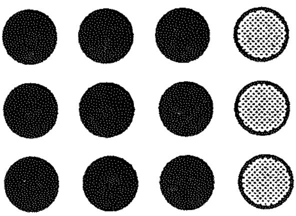
Il ne faut pourtant pas réduire les mathématiques à une langue. Bachelard disait : « Il faut rompre avec ce poncif cher aux philosophes sceptiques qui ne veulent voir dans les mathématiques qu'un langage. Au contraire, la mathématique est une pensée, une pensée sûre de son langage. »

LES REPRÉSENTATIONS MATHÉMATIQUES

Nous appellerons représentations mathématiques des représentations concrètes voulant exprimer certains aspects d'un objet mathématique, objet n'ayant, rappelons-le, de réalité que mentale. Nous avons déjà rencontré quelques représentations mathématiques. Dans le chapitre 5 portant sur la résolution de problèmes, nous donnions certaines caractéristiques.

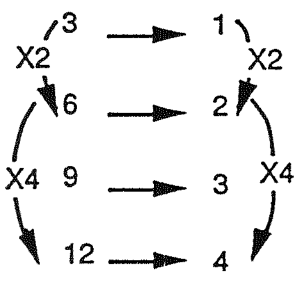
1. Elles expriment des structures.
2. Elles peuvent être de nature spatiale, verbale ou numérique.
3. Elles sont interreliées.
4. Elles sont ouvertes.
5. Elles sont assez complexes pour être suffisamment riches.
6. Elles constituent un langage.

Voici un exemple d'une représentation mathématique :



Cette figure exprime une relation entre des symboles gris et des symboles noirs. On voit qu'il y a trois noirs pour un gris. On peut associer à ce schéma l'expression « 3 sur 4 » ou « 3 pour 1 » ou encore la fraction 3/4. Mais on peut aussi associer à ce schéma une grande variété de situations concrètes.

Associée au même problème, nous avions rencontré la représentation suivante



Cette représentation met en évidence des relations numériques. Pourtant elle représente la même situation, mais elle exprime autre chose. Elle aussi peut être associée à la fraction 3/4.

Ces représentations sont des représentations mathématiques dans la mesure où elles sont des intermédiaires entre une écriture mathématique, un concept mathématique et une situation concrète. Elles sont du domaine du langage car elles expriment des relations ou des propriétés. Elles ne font pas partie de la langue mathématique car elles n'ont pas la généralité de l'écriture mathématique que possède l'expression a/b. Par contre, elles offrent des représentations partielles d'un objet mathématique. Elles doivent être « ouvertes », dans le sens où elles doivent pouvoir évoluer, se transformer et être associées à d'autres représentations mathématiques. Elles doivent offrir un support à la pensée. Elles peuvent aussi donner une batterie de représentations permettant de donner une forme à un problème et permettant de le résoudre.

Parmi les représentations mathématiques, on peut aussi placer des modèles plus concrets. Par exemple, l'image d'un ascenseur circulant du troisième sous-sol au troisième étage peut être associée aux nombres entiers relatifs. Ces modèles concrets peuvent aider certains élèves, à condition d'être transitoires. Si un élève identifie le modèle de l'ascenseur aux nombres entiers relatifs, il ne comprendra rien au produit. Ces représentations sont des lieux de projection. Le geste mental à faire n'est donc pas un geste de mémorisation du modèle, mais de projection par lequel on tente de concrétiser une relation, une structure ou un langage qu'on ne comprend pas encore vraiment. Si l'on réussit à faire cette projection, l'objet mental se trouve renforcé, mais il continue à exister en dehors d'une concrétisation particulière et il pourra se projeter dans bien d'autres situations.

Le travail qui consiste à trouver des représentations mathématiques, à les comparer, à les faire évoluer, toujours comme lieu de projection d'un langage et d'un objet mathématique, est le moyen de développer ce qu'on a appelé le « langage intérieur mathématique ». Ce langage intérieur est indispensable pour donner du sens et pour résoudre des problèmes.

L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE

Nous avons défini trois niveaux : celui de l'objet mathématique, celui de la langue mathématique et celui des représentations mathématiques. Cela nous permet déjà de préciser la nature de certains gestes mentaux que l'on peut rattacher à la compréhension mathématique, comme la projection, et de définir les particularités de l'évocation mathématique. Mais qu'en est-il de l'activité mathématique ? Comment agit un mathématicien ?

La grande majorité des mathématiciens a l'impression d'un « terrain qu'on découvre » et que les mathématiques, pour être cachées, n'en sont pas moins préexistantes. C'est aussi ce que dit André Joyal : « Il y a une sorte d'inconnu et puis tout d'un coup il y a un petit coin du voile qui est soulevé et puis on voit, on comprend tout d'un coup ce qui se passe. » Il continue : « Il y a découverte de quelque chose qui est là [...] et je crois que les structures mathématiques sont déjà là [...]. » Mais l'univers que l'on découvre n'a pas de réalité concrète. Jacques Riguet [2] nous décrit ce qu'il découvre, il nous parle d'un monde « plus architecturé, beaucoup plus cristallin. Ces continents-là qui étaient tout à fait uniformes au départ devenaient des espèces de temples avec des parois belles et rigides et les communications entre ces divers secteurs étaient elles aussi très architecturées. » Très souvent, les mathématiciens parlent de cristal, sans doute pour exprimer la transparence et la dureté structurelle de l'univers mathématique. Même si l'univers mathématique part à la découverte du réel, il ne se confond jamais avec lui. Le résultat de cette exploration est un univers purement conceptuel.

Mais d'autres mathématiciens comme Roger Apéry, très minoritaires, ont une conception constructiviste des mathé-

2. Professeur à l'université de Paris-V, cité par J. Nimier, *Entretiens avec des mathématiciens*, IREM de Lyon.

matiques : il n'y a pas de mathématiques sans mathématicien. « En tant qu'êtres de raison, les êtres mathématiques n'existent que dans la pensée du mathématicien et non dans un monde platonicien indépendant de l'esprit humain [3]. » Roger Apéry insiste aussi sur l'importance du temps dans l'approche constructiviste : « Le mathématicien constructif refuse le tabou philosophique interdisant de parler de temps et de liberté, car toute activité mathématique exige un esprit libre opérant dans le temps. » Les mathématiciens « constructivistes » donnent une grande importance à l'algorithme [4], qui permet de déterminer la validité d'une expression logique.

On retrouve deux conceptions des mathématiques que nous avions déjà trouvées chez les enfants : d'un côté, ceux pour qui les mathématiques sont situées en dehors d'eux, sans que le temps n'intervienne, bref, les mathématiques qu'on voit et qu'on découvre. De l'autre, les mathématiques qu'on construit à l'intérieur de soi, les mathématiques qu'on invente dans la durée.

Le découvreur ne crée aucun objet nouveau, mais cherche à comprendre pourquoi les choses ont la forme qu'elles ont. A. de La Garanderie décrit de cette façon [5] l'activité mentale du découvreur : « La dialectique mentale du découvreur s'active dans ce jeu de va-et-vient entre une réalité qui ne livre ses secrets qu'à ceux qui remettent en question les moyens grâce auxquels ils la comprennent. » C'est une des caractéristiques du geste de projection dont nous avons parlé : on tente de projeter un objet mental sur la réalité, si la projection échoue, on modifie l'objet mental. Le découvreur doit lui aussi inventer, créer les catégories mentales qui lui donnent une possibilité d'interprétation et d'unification d'une réalité en dehors de lui. Sa

3. Roger Apéry, « Mathématique constructive », *Penser les mathématiques*, Point Sciences.

4. Un algorithme est une suite de règles à appliquer ou d'actions à exécuter dans un ordre déterminé dans le but d'obtenir un résultat précis.

5. A. de La Garanderie, *Comprendre et imaginer*, Centurion, p. 128.

liberté réside dans ce choix des *a priori* théoriques à partir desquels il va évoquer la réalité.

L'inventeur commence par prendre conscience d'un manque, de « manières de faire » peu efficaces avec évocation de représentations mentales d'une possibilité nouvelle [6]. Son imagination fonctionne non par explication mais par application, non par déduction mais par induction. Il veut savoir non pas pourquoi, mais comment. On retrouve bien l'importance que les mathématiciens constructivistes donnent à l'algorithme, cette machine à produire des résultats. On conçoit aussi que le remplacement du pourquoi des mathématiciens classiques par le comment des mathématiciens constructivistes heurte profondément les premiers.

Les inventeurs pourront avec profit « inventer » des machines à résoudre des problèmes, imaginer des algorithmes et les représentations mathématiques correspondantes, et même des machines de résolution presque « concrètes ». Les représentations s'apparentent alors à des représentations d'algorithmes. L'objet mathématique correspond à une description imagée ou verbalisée de ce type de représentations mathématiques.

LE DÉCOUVREUR ET L'INVENTEUR

Pour être mathématicien, il faut être inventeur ou découvreur, c'est-à-dire, si l'on reprend les termes d'A. de La Garanderie, ne pas se contenter de reproduire ou de répéter, ne pas se contenter de faire des calques de la réalité. Dès le début, il faut intégrer cette dimension dans l'éducation mathématique. Il y a là une grande difficulté pour les enfants qui ont tendance à se placer en « troisième per-

6. A. de La Garanderie, *Comprendre et imaginer*, Centurion, p. 128-129.

sonne », c'est-à-dire à se poser en spectateur. Un mathématicien est un acteur qui doit résoudre des problèmes. Or, les spectateurs détestent souvent devenir acteurs. Il y a là un travail souvent difficile : apprendre à celui qui dit « il » à dire « je ».

Pour Cantor, l'essence des mathématiques réside dans la liberté. Cette liberté lui permet de se donner des moyens d'interprétation inédits s'il est découvreur ou des moyens de faire et de transformer s'il est inventeur. Cette liberté permet à un mathématicien de poser l'existence d'êtres mathématiques nouveaux, de les nommer, de changer leur nom au besoin. Nous avons rencontré des enfants qui étaient en difficulté parce qu'on voulait leur présenter des mathématiques « concrètes », alors qu'ils avaient besoin de partir de définitions formelles et d'aller ensuite vers le concret. Accepter une définition formelle, pour un découvreur, n'est pas une contrainte, puisque cette définition lui donne l'explication de la situation de problème dans laquelle il se trouve.

Rappelons le cas de Dal. qui disait ne rien comprendre aux nombres entiers relatifs. Toutes les analogies des nombres négatifs avec les températures négatives, avec les façons de repérer les sous-sols dans les ascenseurs, etc., lui paraissaient absurdes et même lui donnaient l'impression qu'on se moquait d'elle. C'est simplement au moment où on lui a dit que la solution de l'équation $7 + ? = 5$ était par définition le nombre $^{-}2$ qu'elle a accepté l'idée de nombre négatif. La définition formelle posait l'existence d'un objet mathématique qui unifiait la résolution des équations du premier degré. La découverte porte sur cette unification de la résolution de l'équation, permise par l'invention de l'objet mathématique « nombre relatif ». Grâce aux nombres relatifs définis formellement, on peut découvrir qu'on peut résoudre toutes les équations du premier degré de la même façon.

Inventeur, découvreur et conflit cognitif

On parle souvent de «conflit cognitif» pour décrire la situation d'un élève se trouvant devant une contradiction entre ce qu'il croit et ce qu'il voit dans la situation où il se trouve. La prise de conscience de cette contradiction l'oblige à faire évoluer ses «croyances» pour surmonter la contradiction. Les concepts mathématiques pourraient ainsi évoluer à partir de la prise en compte de conflit cognitif et de leur résolution.

Nous voyons que c'est tout à fait l'attitude du «découvreur», mais que ce n'est pas celle de «l'inventeur» qui ne va pas tant percevoir la contradiction qu'un manque à combler par une autre façon de faire. L'inventeur va plutôt se comporter selon la description de Bergson [7]: «La pensée est orientée vers l'action et, quand elle n'aboutit pas à une action réelle, elle esquisse une ou plusieurs actions virtuelles, simplement possibles. Ces actions réelles ou virtuelles, qui sont la projection diminuée ou simplifiée de la pensée dans l'espace et qui en marquent les articulations motrices, sont ce qui en est dessiné dans la substance cérébrale.» Le conflit cognitif ne va donc pas produire le même effet pour le découvreur et l'inventeur. Le découvreur va bien faire ce qu'on attend de lui, ce qui n'est pas le cas de l'inventeur.

Enfin, pour celui qui se trouve en troisième personne, le «conflit cognitif» va être ressenti douloureusement, sans provoquer de remise en cause ni de ce qu'il sait ni de ce qu'il pourrait imaginer. Étant en projet de reproduire, il va simplement s'estimer trahi et va se dire que décidément les mathématiques, ce n'est pas pour lui. Il faut lui apprendre, avant de le mettre en situation de conflit, à se placer en «première personne», ce qui est long, soit passer par l'apprentissage d'algorithmes et le faire évoluer ensuite

7. Bergson, «Pensée et pantomime», *L'Énergie spirituelle*, Bibliothèque de philosophie contemporaine, PUF.

vers la compréhension, ce que nous allons aborder un peu plus loin. Pour que le conflit cognitif soit efficace, il doit s'adresser aux « découvreurs ». Les « inventeurs » vont trouver des moyens de l'éviter et les autres vont se sentir extrêmement désemparés.

LA DÉMONSTRATION, LA RIGUEUR

« La déduction est un outil qui constitue un moyen bien plus efficace de recherche que l'observation directe ou l'expérience [8]. » Cette remarque donne toute sa place à la déduction en la mettant au service de la créativité. C'est aussi ce qu'affirme Bertrand Russell : « La logique est devenue la grande libératrice de l'imagination. » L. Wittgenstein [9] écrit : « L'argument logique peut être envisagé comme une façon de contraindre quelqu'un à reconnaître quelque chose. »

Mais ce n'est pas l'étude de la logique, qui n'est qu'une branche des mathématiques, qui donne toute sa richesse à la rigueur ou à la déduction. La rigueur est une façon de se conduire, presque une éthique en mathématiques. Elle fournit un guide à la recherche et à elle rend communicables des résultats qui peuvent avoir été trouvés par une activité mentale qui, pour être mathématique, n'était en rien guidée par le formalisme ou la rigueur. La déduction accompagne, à un moment ou l'autre, toute activité mathématique. La démonstration intervient alors que l'élève a déjà rencontré et utilisé la déduction dans la recherche de solution ou dans la présentation de résultats en mathématiques. L'initiation à la rigueur précède donc la démonstration. L'initiation à la démonstration est un moment délicat et nous y consacrons un chapitre.

---

8. Maurice Loi.
9. Cité par Henri Planchon, *Réapprendre les maths*, les Éditions ESF.

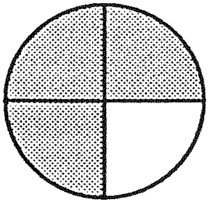
LES ALGORITHMES ET LA COMPRÉHENSION EN MATHÉMATIQUES

L'algorithme, indépendamment du rôle privilégié que lui attribuent les « inventeurs » en mathématique, joue un rôle moteur dans l'apprentissage des concepts. Cependant, l'algorithme ne suffit pas à lui seul pour faire acquérir un concept. La connaissance d'algorithmes peut déboucher sur l'acquisition de concepts à condition de faire projeter l'algorithme dans une situation nouvelle. Pour préciser le sens de cette projection, nous allons donner l'exemple d'un élève aux prises avec des fractions et nous allons illustrer le lien entre les objets mentaux, les représentations concrètes, les algorithmes et l'évocation mathématique.

La confusion entre l'objet concret et l'objet mathématique

Dialogue avec C., 11 ans, presque exclusivement visuel, en grande difficulté en mathématiques.

« Sais-tu calculer les 3/4 de 20 ?
– ??? [10]. Non.
– Et 1/4 de 20 ?
– ??? Non
– Sais-tu prendre le 1/4 d'une pizza ?
– Oui. »
Il dessine :



10. Les trois « ? » indiquent qu'un temps assez long s'est écoulé entre la question et la réponse.

« Regarde bien ce dessin. Est-ce qu'il peut t'aider à calculer les 3/4 de 20 ?

– ??? Non. »

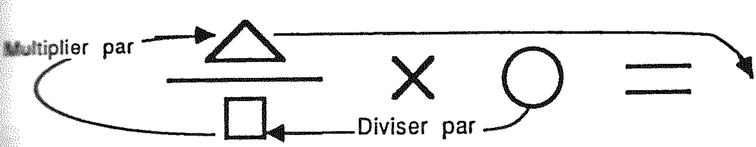
J'insiste, je rapproche le dessin et l'expression 3/4 de 20.

« ??? Non, ça ne m'aide pas. »

Le dessin de la tarte ou de la pizza n'est pas considéré comme la représentation d'une division suivie d'une multiplication pouvant se transférer sur des nombres. Pourtant c'est C. qui a fait le dessin et l'a associé à 3/4. La tarte est simplement considérée comme une image et non pas un langage.

Présentation de l'algorithme

« Je vais te dire comment faire : regarde ce schéma et dis-moi si ça t'indique comment faire un calcul comme 3/4 de 20. »



Il regarde le dessin avec beaucoup d'attention et demande : « Je peux mettre mes nombres ?

– Oui.

– Je commence avec le rond ?

– Oui.

– Ensuite, je divise par 4 ?

– C'est ça. »

Il écrit 20 ÷ 4 = 5, et poursuit : « Ensuite, je multiplie par 3 ?

– C'est ça.

– Et je place le résultat là ?

– Oui. »

Il a convenablement interprété le schéma : il a bien lu ce dessin comme l'indication d'un algorithme à réaliser. Il sait ensuite appliquer l'algorithme.

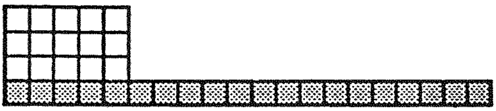
Exercice de projection sur une situation géométrique

Je reprends : « Je vais faire un dessin sur l'ordinateur. Ne regarde pas ce que j'écris. » Il se tourne pour ne pas regarder, et je tape :

20 ->

MONTRE **3/4**

L'ordinateur fait le dessin suivant :



La rangée de 20 carrés est rouge (en gris ici). Les trois rangées de 5 carrés sont vertes (en blanc ici).

« Est-ce que tu peux voir 3/4 de 20 dans ce dessin ?

– ??? Non.

– Combien il y a de carrés en rouge ?

– 20.

– Combien de carrés verts ? »

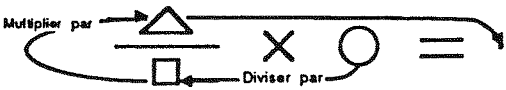
Il compte : « 15.

– Regarde simplement la première rangée de carrés verts. Tu peux imaginer qu'il n'y a qu'elle, que les autres rangées n'existent pas ?

– Oui.

– Calcule le 1/4 de 20. »

Il reprend le schéma :



et fait consciencieusement ses opérations (division par 4, multiplication par 1) : « C'est 5.

– Regarde maintenant la première rangée de carrés verts.

– On peut dire que c'est le quart de 20.

– Combien on a de rangées sur le dessin ?

– 3.

– Ça fait combien de quarts ? »

Il ne comprend pas la question. Je montre la deuxième rangée : « Les deux rangées ensemble, ça fait combien de quarts ?

– 2.

– Et les trois rangées ?

– 3.

– Ça fait combien de quarts en tout ?

– 3 quarts.

– Est-ce que tu vois le lien entre le calcul que tu as fait et ce dessin ?

– Oui. »

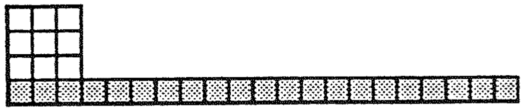
L'algorithme, tout en étant un moyen d'obtenir un résultat numérique, est devenu un moyen d'interpréter une réalité d'une autre nature (le dessin fait par l'ordinateur). Le travail de C. consiste à interpréter ce dessin à partir d'un algorithme. Le dessin est évoqué à partir de la projection mentale de l'algorithme.

Reconnaissance de l'algorithme dans la situation géométrique

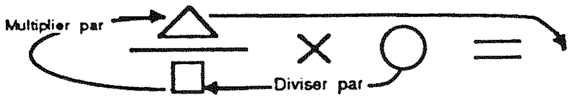
« Tourne-toi. Je vais écrire quelque chose sur l'ordinateur. » J'écris :

21 ->

MONTRE 3/7



« Trouve la fraction de 21 représentée en vert. » Je lui donne de nouveau le schéma.



Il le place devant lui et écrit : ___ / ____ de 21 ; puis il écrit 21 ÷ 7 = 3 × 3 = 9

Il complète ensuite sa fraction : 3/7 de 21 = 9. Il donne alors la réponse : « C'est 3/7. »

Je vais ensuite faire d'autres dessins analogues au précédent et lui demander de trouver la fraction correspondante. Nous continuerons de cette façon pendant trois quarts d'heure, en faisant afficher des représentations de fractions et l'algorithme lui servant à interpréter le dessin.

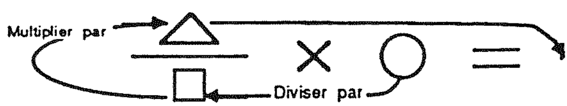
En partant, il me dit qu'en classe il ne comprend rien parce que son professeur explique bien trop ; il parle, il parle ! On retrouve là l'expression de son besoin d'évocation visuelle.

FAISONS LE POINT

1. L'image de la tarte n'est pas vue comme la représentation d'une suite d'actions à effectuer, mais comme une image statique. C. faisait une association très forte entre ce dessin statique et l'écriture 3/4, et seulement avec ce dessin. Pour lui, 3/4 est associé à un objet concret. Toute évolution vers l'objet mathématique est bloquée.

Ces schémas entraînent un malentendu entre l'enseignant et l'élève : l'enseignant les considère comme un langage exprimant une suite d'actions que l'on peut associer à un calcul, l'élève les considère comme représentant un état figé.

2. C. a appris à suivre un algorithme à partir d'un schéma. Rappelons que C. est presque exclusivement visuel.



C. comprend ce que le schéma veut dire, il l'interprète bien comme la description d'un processus à suivre. Si nous étions restés là, nous serions encore très loin du début de la compréhension d'un objet mathématique, ici la fraction.

3. Le travail de compréhension de l'objet mathématique commence quand C. tente d'interpréter une situation nouvelle, ici un dessin construit par l'ordinateur, à partir de l'algorithme. À partir de ce moment-là, il essaye d'évoquer, donc de donner un sens au dessin vu sur l'ordinateur à partir d'un algorithme numérique.

Le travail de C. a consisté à interpréter des représentations concrètes particulières à partir de l'algorithme qu'il connaissait. En effectuant ce travail, la fraction a dépassé son statut d'outil de calcul pour devenir un outil d'interprétation d'une certaine représentation. C. a donné à l'écriture fractionnaire un statut qu'elle n'avait pas : il a fait d'un outil de calcul un outil d'interprétation de la réalité, un outil d'évocation.

La fraction se projette dans une représentation concrète et en même temps donne un sens à cette représentation. Ce travail mental de projection est un geste de compréhension.

Les représentations mathématiques sont des lieux privilégiés de « projection ». Elles jouent donc un rôle très important, à condition de ne pas être considérées comme des « images » à retenir, mais comme des situations privilégiées de « projection ».

UNE COMPRÉHENSION « LINGUISTIQUE » DES MATHÉMATIQUES

On peut aussi comprendre les mathématiques en se plaçant uniquement à l'intérieur de la langue mathématique, donc en dehors de toute considération spatiale ou temporelle. On peut rencontrer ce type de compréhension chez des élèves très jeunes. Voici le cas d'un élève de 9 ans, S., qui avait à résoudre le problème suivant :

Un père possède 100 dollars. Il veut répartir cette somme entre ses trois enfants. Chaque fois qu'il donne 5 dollars à l'aîné, il donne 3 dollars au second (cadet) et 2 dollars au dernier (benjamin).

J'énonce le problème. Il m'écoute avec soin et ne dit plus rien. Son regard est fixe, droit devant lui. Il n'écrit pas. Au bout d'une minute environ, il me dit : « 50, 30 et 20 » et m'explique comment il a fait : « 5, 3 et 2, ça fait 10. 10 fois 10, ça fait 100. 5 est la moitié de 10, donc le premier avait la moitié de 100, donc 50. Quand tu as 50, le reste est facile : tu multiplies par 10, et tu as 30 et 20. »

Je lui demande s'il a pensé à des dollars pendant son calcul : non, juste aux nombres. Il faut remarquer qu'il a trouvé 50 parce que 5 était la moitié de 10, donc que la proportion devait être conservée, d'où le 50. Deux éléments sont particulièrement frappants dans la méthode utilisée par S. :

1. Pendant toute la recherche de la solution, il se place uniquement au niveau numérique. Il n'y a aucune traduc-

tion explicite en dollars, aucune référence aux aspects concrets du problème.

2. Il a une familiarité très grande des propriétés numériques. Il utilise plusieurs propriétés successivement et passe très facilement de l'une à l'autre : il observe d'abord que le père donne chaque fois la moitié à l'aîné, donc que l'aîné aura la moitié du total. Ensuite il utilise une autre propriété : l'aîné aura au total dix fois plus que ce que le père lui donne en une fois. Cette proportion sera conservée et sera respectée pour ses autres frères. Ils auront eux aussi 10 fois plus que ce que leur père leur donne en une fois, ils auront donc respectivement 10 fois 3 et 10 fois 2.

S. parle et utilise cette langue mathématique comme on utilise une langue maternelle : un mot tire son sens des liens directs avec les autres mots et avec le contexte linguistique. Dans son cas, la langue est essentiellement numérique, mais il est loin du simple quantitatif. Il utilise des relations entre les nombres. S. explique qu'il s'est placé depuis la maternelle dans un univers purement numérique. Il a joué avec une calculette dès la maternelle et il me dit qu'il essayait toujours de prévoir le résultat d'un calcul avant de faire afficher le résultat. La calculette et la façon dont il l'utilisait lui ont donné accès directement à la structure mathématique. C'est cette structure qui lui était familière et qu'il a ensuite projetée dans un univers plus concret. Depuis cette époque, S. est devenu un excellent élève en mathématiques, ce qu'il n'était pas encore à l'époque de l'entretien que je rapporte.

Cela nous montre qu'il y a un autre accès, plus direct, à la compréhension mathématique : un contact direct avec la structure mathématique et son écriture. Il faut remarquer que S. a plongé dans la structure mathématique dans un contexte non scolaire. C'est seul avec sa calculette qu'il travaillait. Il ne faisait pas d'opérations pour appliquer un algorithme, mais pour faire des liens entre des objets mathématiques. Il s'agissait non pas d'une mécanisation de son activité, mais d'un travail mental dont il était le seul maître et dont le but était d'utiliser les possibilités de la calculette pour lui permettre d'explorer les propriétés numériques vues sous les angles les plus variées, jusqu'à pouvoir les prévoir à coup sûr.

Le geste de la compréhension linguistique consiste à transformer une forme donnée en d'autres formes pour faire le plus de liens possible à l'intérieur de la « langue mathématique. » S. donne une clé de l'acquisition de cette compréhension linguistique : il expérimentait avec la calculette en tentant de prévoir le résultat. C'est au moment de cette tentative de prévision qu'il créait les liens qui sont à la base de la compréhension linguistique.

Voici quelques activités renforçant la « compréhension linguistique » pour un élève connaissant l'algorithme présenté plus haut. On cherche le nombre pouvant remplacer le « ? ».
– 3/? de 12 = 18.
– ?/4 de 28 = 49.
– Toutes les possibilités correspondant à ?/? de 36 = 54.
– Comment caractériser les nombres permettant le calcul ?/? de 72 dans l'ensemble des nombres entiers.
– Comment caractériser les nombres pouvant remplacer le ? pour que l'expression 3/4 de ? soit calculable.
– Etc.

Au cours de ces activités, on emploiera les mots mathématiques les plus précis possible : numérateur, dénominateur, multiple, diviseur, etc.

Il est préférable de faire tous ces calculs de tête, sans écrire. Quand un élève bloque, on retourne à la définition verbale ou schématique de l'algorithme correspondant au style d'évocation. On simplifie les nombres jusqu'à l'extrême s'il le faut, plutôt que de donner la réponse ou une explication. Il faut que l'élève, à partir d'un aspect qui lui est donné, fasse lui-même le travail mental qui consiste à l'envisager sous une forme différente. C'est cette transformation qui est à la source de la compréhension mathématique au niveau de la langue mathématique. Ces transformations multiples vont lui permettre de prendre en compte la complexité à l'intérieur de laquelle la compréhension va pouvoir se construire en tissant le plus de liens possible entre l'écriture nouvelle et toutes les autres écritures déjà connues.

À partir du même algorithme, on peut faire une projection dans une situation concrète et commencer aussi un travail de reformulation conduisant à une compréhension linguistique. L'algorithme peut donc être le point de départ de la création d'un objet mathématique purement mental à travers la projection ainsi que d'une compréhension linguistique à partir de la reformulation. Projection et reformulation conduites mentalement sont des gestes importants de compréhension mathématique.

On pourrait être tenté de faire de ce geste mental de reformulation et de déplacement de sens à l'intérieur même de la langue mathématique l'essentiel de la compréhension en mathématiques. Cela pourrait conduire à de graves erreurs. L'enseignement mathématique s'appuie parfois exclusivement sur la reformulation linguistique. Cela peut conduire à des catastrophes. La langue mathématique, même si elle exprime des réalités non concrètes, doit se construire aussi à partir de liens très forts avec la réalité.

Reformulation linguistique et projection

Cette reformulation à l'intérieur même de la langue mathématique et l'évocation mathématique dont j'ai parlé plus haut me semblent deux composantes importantes dans la compréhension en mathématiques. L'une vient-elle avant l'autre ?

Un enfant comme S. a su pénétrer le langage mathématique directement. Il semble bien qu'on puisse lui enseigner un concept nouveau directement au niveau du langage mathématique, sans négliger de lui demander d'en assurer lui-même les projections indispensables vers la réalité des représentations. Pour d'autres, il ne semble pas y avoir d'autres moyens que de présenter le geste concret, ou le résultat de cette action en même temps, ou juste avant d'introduire un nouveau « mot » mathématique. J'ai rencontré une élève qui n'a pu faire des divisions élémentaires sans faute qu'à partir du moment où elle a pu décrire précisément comment on faisait un partage et non pas seulement ce qu'était un partage. Pour tous ces élèves, il semble sûr qu'un lien très fort avec la réalité des actions ou des images concrètes soit indispensable à l'utilisation autonome de la langue mathématique.

La langue mathématique doit devenir autonome

Cependant dans tous les cas, il faut que la « langue mathématique » devienne autonome par rapport à la réalité des actions concrètes et des représentations. C'est ce que ressentait cet élève de 10 ans à qui on donnait des problèmes pouvant tous se résoudre en faisant une division, cette division pouvant être une division-partage ou une division-regroupement. Depuis deux semaines, je lui demandais de me dire s'il s'agissait d'un partage ou d'un regroupement avant de résoudre le problème.

Moi : – Est-ce que c'est un partage ou un regroupement ?

Lui : – C'est un partage. Mais écoute, on n'a qu'à faire la division, elle nous donne la réponse. Après, tu vois bien ce que c'est !

C'était dit avec un certain agacement, alors qu'au début il avait trouvé difficile de faire cette distinction, puis avait été très heureux de la faire. Tout d'un coup, ça n'avait plus d'intérêt. Il pouvait travailler directement au niveau du langage mathématique, certain qu'il était de pouvoir en sortir quand il le voulait.

En obligeant les élèves à se référer constamment à une réalité concrète, on risque de les empêcher de développer une langue mathématique autonome. C'est même un des risques que l'on court à vouloir renvoyer toujours les élèves en difficulté à du matériel concret. Il faut aussi les faire travailler au niveau de l'écriture mathématique seule. Le travail fait «de tête» semble même particulièrement efficace.

Une expression mathématique est toujours capable de se projeter dans des situations concrètes très différentes de celles qui ont permis la première association. La richesse des mathématiques provient en effet de cette multitude de concrétisations d'une même expression mathématique, ou au contraire des multiples expressions différentes qui peuvent se projeter dans une même réalité et en donner des évocations mathématiques différentes.

FAISONS LE POINT

On distingue trois niveaux en mathématiques:
1. Les objets mathématiques: objets mentaux tendant à se projeter dans des situations concrètes. Un objet mathématique se crée par un va-et-vient entre deux gestes mentaux, l'un consistant à chercher des invariants, l'autre à projeter l'objet mental en formation dans une certaine réalité. Chaque projection réussie dans une situation concrète nouvelle provoque l'évolution de l'objet mental.
2. La langue mathématique, langue dont chaque terme est définie en fonction des autres termes. Les termes de la langue mathématique renvoient à des objets mentaux. La reformulation permet de donner un sens à la langue mathématique.
3. Les représentations mathématiques: représentations de nature spatiale, verbale ou numérique exprimant des structures, interreliées, ouvertes et complexes, qui

constituent un langage. Elles sont le lieu privilégié de la «projection». La création et l'utilisation de représentations mathématiques sont des moyens essentiels d'amener à la création des objets mathématiques.

Les gestes mentaux à développer sont donc:
– la mise en évidence d'invariants;
– la projection d'un objet mathématique dans une situation ou une représentation mathématique;
– la reformulation linguistique.

La compréhension mathématique peut se développer à partir de la connaissance d'algorithmes à condition que ces algorithmes soient projetés dans des situations nouvelles ou qu'ils soient suivis par des exercices de reformulation à l'intérieur de la langue mathématique.

L'évocation mathématique consiste à reconnaître des structures ou des objets mathématiques dans des situations concrètes ou mathématiques. On développe ainsi «l'œil du mathématicien», évocation différente de «l'œil de l'artiste» ou de «l'œil du physicien». La différence entre le regard du mathématicien et le regard «optique» du spectateur donne sa dynamique à la démonstration [11].

Faire des mathématiques, résoudre des problèmes demandent d'être «découvreur» ou «inventeur», selon les habitudes évocatives de chacun. Apprendre à devenir inventeur ou découvreur passe par:
– La précision de l'évocation: le va-et-vient entre la réalité et l'évocation est toujours à la base de toute activité mentale subséquente. Ce n'est rien d'autre que l'ouverture au monde, le cerveau étant l'organe d'attention à la vie, comme le dit Bergson dans «Pensée et pantomime».
– Ensuite il y a l'identification d'un manque débouchant sur l'invention, ou remise en question des moyens

11. Voir le chapitre 9 consacré à la démonstration.

de compréhension débouchant sur la découverte. Ces deux gestes mentaux[12], différents, sont à la base de l'entraînement à l'invention ou à la découverte.

– Le passage en première personne : le découvreur ou l'inventeur doivent se dire « je », sinon ils ne peuvent que reproduire ce qui permet de résoudre des exercices mais ne permet pas de résoudre des problèmes.

12. Voir A. de La Garanderie, *Comprendre et imaginer*, la pédagogie des découvreurs et des inventeurs, Centurion, p. 123.

VII

Le langage intérieur

Une même opération pour des situations différentes

Un problème est associé à une certaine chronologie ou à une description dans laquelle interviennent des relations. La décision d'utiliser une opération mathématique ne peut se faire que si on la reconnaît dans la représentation qu'on s'est donnée du problème. Or, une opération mathématique est en général associée à une situation particulière à partir de laquelle elle a été définie. La soustraction est souvent associée au processus qui consiste à retrancher des éléments à un ensemble. Mais la soustraction peut être associée à bien d'autres processus, ou simplement à un état ou encore à une relation purement numérique. Si l'on s'en tient strictement à la situation de définition, il sera impossible d'associer l'opération à une situation nouvelle. Nous nous heurtons là à une difficulté importante : comment prendre conscience de l'équivalence de deux situations apparemment différentes ? (1) : Jacques a 12 billes et en perd 3 décrit un état initial et une action. (2) : Marie mesure 1,40 m et Jean 1,25 m décrit simplement un état. On n'enlève rien a Marie et pourtant la différence de taille nous sera donnée par une soustraction, tout comme le nombre de billes qui reste à Jacques.

On ne peut transformer la situation (1), qui fait intervenir le temps, dans la situation (2), d'où la chronologie est absente. Il faut alors se placer à un certain niveau d'abstraction pour découvrir qu'on peut leur associer une même représentation. Le processus qui consiste à représenter avec une économie de moyens de plus en plus grande la situation initiale est l'outil privilégié qui va permettre de traiter des situations différentes par la même opération mathématique. On retrouve l'importance du travail d'évocation.

La tentation peut être grande de court-circuiter le travail de représentation et de sauter tout de suite à l'opération en négligeant les différences entre les deux problèmes à résoudre. On dit alors simplement qu'il faut soustraire dans les deux cas ; et en effet, certains élèves comprennent quand même. Ce sont ceux qui réussissent. Ils ont déjà acquis la souplesse nécessaire pour découvrir le sens implicite de tout ce qu'on ne leur dit pas. Les autres ne comprennent pas que deux cas apparemment si différents puissent être traités de la même façon. Ils renoncent simplement à comprendre. C'est pour les élèves les plus faibles qu'il faut passer le plus de temps à préciser tout le processus de représentation en tenant compte de la diversité des situations. On ne le fait pas parce qu'on trouve que c'est leur compliquer la vie !

Le langage intérieur en mathématiques

Un problème ne se présente pas, en général, sous la forme qui permet son traitement direct. Il doit être reformulé et c'est le rôle du « langage intérieur mathématique ». La traduction fait que les objets mentaux et la langue mathématique entrent en action à bon escient. Le langage intérieur part de situations réelles, situées dans le temps et l'espace et les associe aux objets mathématiques. Le langage intérieur mathématique est constitué par: des représentations mathématiques, des énoncés, des processus (suite d'actions), des schémas, chacun de ces éléments pouvant être associé à un objet mathématique.

Comme ces éléments sont intériorisés, ils ont une forme dépendant étroitement des habitudes évocatives. Ils s'appuient sur toute l'expérience antérieure et la prolongent. Enseigner les mathématiques, c'est pour une part faire en sorte qu'un élève se construise un « langage intérieur mathématique ».

Les représentations mathématiques

Le langage intérieur mathématique inclut « les représentations mathématiques ». Rappelons que nous avons distingué trois niveaux en mathématiques: les objets mathématiques, la langue mathématique, les représentations mathématiques.

L'évocation mathématique se caractérise par un geste mental: la projection des objets mathématiques dans des situations concrètes. Chaque projection nouvelle d'un objet mathématique provoque son évolution vers une forme plus complète.

Une situation concrète est toujours ambiguë et peut être interprétée de multiples façons: c'est une des causes des difficultés d'un enseignement à « partir du concret », concret qui n'a pas le même sens pour celui qui à déjà fait des mathématiques et celui qui les apprend: le premier projette ce qu'il sait, le second, n'ayant rien à projeter, ne voit que des objets là où il faudrait reconnaître des idées.

Mais la pensée ne peut se développer sur le néant et il lui faut des occasions de s'exercer. Voici quelques processus fondamentaux reliés à la pensée mathématique:

– l'obligation d'avoir à traduire ce qui est exprimé dans une forme vers une autre forme;

– la recherche des ressemblances et des différences sur des situations de même niveau d'abstraction;

n'enlève rien a Marie et pourtant la différence de taille nous sera donnée par une soustraction, tout comme le nombre de billes qui reste à Jacques.

On ne peut transformer la situation (1), qui fait intervenir le temps, dans la situation (2), d'où la chronologie est absente. Il faut alors se placer à un certain niveau d'abstraction pour découvrir qu'on peut leur associer une même représentation. Le processus qui consiste à représenter avec une économie de moyens de plus en plus grande la situation initiale est l'outil privilégié qui va permettre de traiter des situations différentes par la même opération mathématique. On retrouve l'importance du travail d'évocation.

La tentation peut être grande de court-circuiter le travail de représentation et de sauter tout de suite à l'opération en négligeant les différences entre les deux problèmes à résoudre. On dit alors simplement qu'il faut soustraire dans les deux cas ; et en effet, certains élèves comprennent quand même. Ce sont ceux qui réussissent. Ils ont déjà acquis la souplesse nécessaire pour découvrir le sens implicite de tout ce qu'on ne leur dit pas. Les autres ne comprennent pas que deux cas apparemment si différents puissent être traités de la même façon. Ils renoncent simplement à comprendre. C'est pour les élèves les plus faibles qu'il faut passer le plus de temps à préciser tout le processus de représentation en tenant compte de la diversité des situations. On ne le fait pas parce qu'on trouve que c'est leur compliquer la vie !

Le langage intérieur en mathématiques

Un problème ne se présente pas, en général, sous la forme qui permet son traitement direct. Il doit être reformulé et c'est le rôle du « langage intérieur mathématique ». La traduction fait que les objets mentaux et la langue mathématique entrent en action à bon escient. Le langage intérieur part de situations réelles, situées dans le temps et l'espace et les associe aux objets mathématiques. Le langage intérieur mathématique est constitué par : des représentations mathématiques, des énoncés, des processus (suite d'actions), des schémas, chacun de ces éléments pouvant être associé à un objet mathématique.

Comme ces éléments sont intériorisés, ils ont une forme dépendant étroitement des habitudes évocatives. Ils s'appuient sur toute l'expérience antérieure et la prolongent. Enseigner les mathématiques, c'est pour une part faire en sorte qu'un élève se construise un « langage intérieur mathématique ».

Les représentations mathématiques

Le langage intérieur mathématique inclut « les représentations mathématiques ». Rappelons que nous avons distingué trois niveaux en mathématiques : les objets mathématiques, la langue mathématique, les représentations mathématiques.

L'évocation mathématique se caractérise par un geste mental : la projection des objets mathématiques dans des situations concrètes. Chaque projection nouvelle d'un objet mathématique provoque son évolution vers une forme plus complète.

Une situation concrète est toujours ambiguë et peut être interprétée de multiples façons : c'est une des causes des difficultés d'un enseignement à « partir du concret », concret qui n'a pas le même sens pour celui qui à déjà fait des mathématiques et celui qui les apprend : le premier projette ce qu'il sait, le second, n'ayant rien à projeter, ne voit que des objets là où il faudrait reconnaître des idées.

Mais la pensée ne peut se développer sur le néant et il lui faut des occasions de s'exercer. Voici quelques processus fondamentaux reliés à la pensée mathématique :

– l'obligation d'avoir à traduire ce qui est exprimé dans une forme vers une autre forme ;

– la recherche des ressemblances et des différences sur des situations de même niveau d'abstraction ;

– la projection qui ouvre aussi le chemin de la généralisation ;

– l'exercice de la vérification et de la déduction.

Les deux premiers processus assurent la formation de concepts [1], le troisième ouvre la voie à l'évocation mathématique et le quatrième au raisonnement. La nature particulière des objets mathématiques fait qu'il faut construire des lieux où vont pouvoir se réaliser ces quatre types d'activités mentales. C'est pourquoi nous avons parlé de représentations mathématiques. Une représentation mathématique est composée de signes, de symboles, de schémas qui, pour laisser la priorité à l'activité mentale, doit avoir les six caractéristiques décrites au chapitre 6 (voir p. 203).

Les « représentations mathématiques » offrent un support à la pensée. Elles permettent la formation et l'évolution des concepts mathématiques. Elles constituent un système symbolique offrant la possibilité de faire le lien entre le problème réel et sa résolution mathématique. Elles sont donc un élément du langage intérieur mathématique.

La représentation symbolique, un des moteurs de la compréhension

Nous pensons que ces représentations symboliques sont une source essentielle de progrès : dès qu'on sait utiliser un système symbolique pour communiquer, on doit traduire et projeter. En tentant de voir la situation concrète à partir de la représentation mathématique, ou de construire une représentation mathématique qui permet de structurer une situation concrète, on précise un objet mental mathématique et l'on peut aller vers l'acquisition de la langue mathématique. On provoque une double évocation : celle de la situation concrète (objets, actions, transformations) et de la pro-

---

1. Voir Britt-Mari Barth, *L'apprentissage de l'abstraction*, Éditions Retz.

jection de la représentation symbolique dans la situation concrète, projection qui préfigure la projection de l'objet mental.

Les doigts d'un jeune enfant peuvent déjà être un premier exemple de représentation mathématique. La comptine des nombres, suite ordonnée qui peut se projeter par le comptage dans une suite d'objets concrets, peut constituer aussi une représentation mathématique. Un ensemble organisé de jetons peut aussi constituer un langage symbolique.

Le travail mental effectué à partir des représentations mathématiques, travail d'évocation pour traduire une représentation dans une autre, ou travail de projection de la représentation mathématique dans une situation concrète, doit se faire dans ce que Vygotski appelle la « zone de proche développement » [2], c'est-à-dire dans cette zone qui n'est pas encore maîtrisée mais qui peut le devenir. Travailler dans cette zone oblige à tenir compte de ce que l'élève maîtrise déjà, donc de connaître son « développement actuel ». Le dialogue pédagogique [3], au-delà des connaissances, nous renseigne sur les moyens d'apprendre utilisés et précise la « zone de développement actuel ».

Nous allons préciser ce qu'on entend par « langage intérieur mathématique » et « représentations mathématiques » dans les cas de la soustraction, de la multiplication et de la division. Chacune de ces opérations sera l'occasion de décrire des aspects différents de gestion mentale pouvant se généraliser chaque fois que l'on cherche à donner du sens à une notion mathématique. Pour éviter les répétitions, nous changerons l'angle d'approche de chacune des opérations.

2. Vygotski, *Pensée et langage*, 1935.
3. Voir les chapitres précédents.

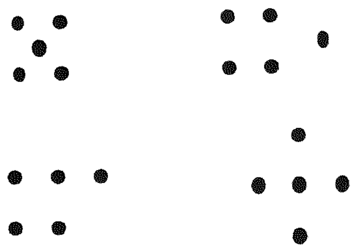
LA SOUSTRACTION

Comptage, calcul, nombre, opération et évocation

Distinguons d'abord opération et calcul. Une opération est un objet mathématique, un calcul, une façon de procéder. « Savoir faire des soustractions » n'est pas synonyme de « connaître le concept de soustraction ». Distinguons aussi calcul et comptage : le comptage se fait en présence d'objets concrets, ce qui n'est pas le cas du calcul. Pour favoriser le passage du comptage au calcul, il faut passer de la perception à l'évocation : à ce propos, on trouvera dans *Comment les enfants apprennent à calculer* [4], de Rémi Brissiaud, des suggestions très intéressantes permettant ce passage.

Le comptage n'est pas suffisant pour acquérir le concept du nombre. Alors que le comptage se fait objet par objet, le nombre s'applique à un ensemble. Organiser des groupes de 4, de 5, etc., oblige à évoquer l'ensemble.

Voici quatre organisations différentes de cinq éléments. Le nombre 5 s'applique à chacune d'elles.



Spontanément les enfants organisent les représentations spatiales des nombres pour les manipuler mentalement.

4. Éditions Retz. Ce livre est particulièrement intéressant pour tous ceux qui s'intéressent aux enfants les plus jeunes.

Voici une activité faite en maternelle favorisant ce passage du comptage au nombre : la maîtresse place un certain nombre [5] de jetons devant elle. Elle demande aux enfants d'en placer autant devant eux. Que veut dire « autant » ? Comment en obtient-on « autant » ? Quand on ne compte pas, on peut placer ses propres jetons exactement en face de ceux de la maîtresse. Ensuite chacun les place comme il l'entend devant lui. On éteint la lumière et quelqu'un passe et « vole » un nombre différent de jetons à chaque enfant. On rallume : combien manque-t-il de jetons ?

Les premières fois, les enfants ne savent pas : ils n'ont pas pris soin de mémoriser le nombre initial de jetons. Après quelques essais, ils vont se méfier. Un certain nombre d'entre eux va commencer à organiser les jetons de façon à donner une forme à l'ensemble, comme nous l'avons fait pour les cinq points. En mémorisant la structure, ils vont aussi en mémoriser le nombre. Une petite discussion fera l'inventaire des méthodes possibles et chacun pourra choisir la sienne. Les enfants vont décrire les « formes » qu'ils retiennent et comment ils procèdent mentalement. Après le « vol » des jetons, chacun va tenter de reconstituer la « forme perdue ». Ce qui manque apparaît alors globalement.

Ce genre d'activités offre des caractéristiques intéressantes : après les premiers essais infructueux, les enfants ont un projet précis, à savoir mémoriser le nombre de jetons en employant une technique qui leur est adaptée. La comparaison entre ce qui reste et ce qu'il y avait peut se faire selon des modalités différentes pour chacun. Enfin, il ne s'agit plus seulement de comptage puisqu'il faut mémoriser un ensemble structuré. Le traitement se fait mentalement, donc en évocation : nous avons là les étapes ouvrant le passage du comptage vers le concept du nombre et le calcul en obligeant à quitter la perception pour l'évocation.

5. Moins de 7.

La soustraction dans la langue mathématique

Chaque opération mathématique a une définition dans la langue mathématique: la soustraction est définie comme l'opération opposée de l'addition. Le résultat de l'opération 12 - 3 est donnée par la résolution de l'équation 3 + ? = 12. On dit que 12 - 3 est le complément de 3 à 12.

Mais un élève qui aborde la soustraction ne possède ni le concept d'opération ni la langue mathématique. Il connaît certaines façons de faire. Il peut même trouver le résultat de la soustraction 5 - 3 en cherchant le nombre qu'il est possible de substituer au point d'interrogation pour rendre vraie l'égalité 3 + ? = 5. Cette façon de procéder se place directement à l'intérieur de la langue mathématique, sans référence à aucune situation concrète, à condition qu'il connaisse les tables d'addition. Ce jeu d'écriture ne peut en rien aider à résoudre un problème concret. Il est cependant important parce qu'il constitue une première initiation à la langue mathématique et au calcul.

Il y a bien d'autres moyens de faire le calcul. Pour trouver le résultat, on peut partir de 3 et compter ce qu'il faut ajouter pour aller à 5. On peut le faire avec des objets, en imaginant des objets ou en imaginant la « bande des nombres », c'est-à-dire la suite des nombres écrite sur une règle. Si l'on peut imaginer la « bande des nombres », on peut aussi trouver le résultat en « comptant à rebours ». Le résultat du calcul de l'opération 5 - 3 peut s'obtenir en comptant à partir de 5 et en reculant jusqu'à trois. Pour cela, il faut se déplacer 2 fois. Il y a équivalence entre partir de 3 et aller à 5 ou partir de 5 et revenir à 3 si l'on considère le nombre de positions occupées pendant le déplacement. Le « comptage à reculons » permet de trouver le résultat d'une soustraction sans se référer explicitement à l'addition, donc tend à faire de la soustraction une opération autonome. Il faut donc pouvoir parler du nombre précédant ou du nombre suivant un nombre donné, puis un peu plus tard parler de la dizaine suivant ou de la dizaine précétant un nombre donné, ou encore de la dizaine ou de la centaine la plus proche. « La bande des nombres » intériorisée est aussi une représentation mathématique qui offre un support à une « définition linguistique » de la soustraction. Toutes ces activités font largement appel à l'expérience passée de l'élève et à ce qu'il connaît déjà.

Plus tard, le lien entre soustraction et addition dans la langue mathématique devra continuer à être renforcé par des activités comme celles-ci :

Tableau à compléter

21 ——> 25
23 ——> 27
302 ——> 306
112 ——> ?
? ——> 108
157 ——> ?

Compléter :

10	7	13			101	
15		18	22			101

Fonction : soit la fonction « ajouter 5 ».
Trouvez les images[6] des nombres 12 ; 45 ; 65.
Trouvez la fonction qui annule le travail de la précédente.
Quelles sont les images de 32 ; 76 ; 26 par cette fonction ?

On peut imaginer bien d'autres activités de cette nature.

6. Au sens mathématique du mot.

La soustraction dans les problèmes

Mais le sens de la soustraction ne peut surgir uniquement des activités précédentes. Le lien entre l'histoire du problème ou une description spatiale et l'opération numérique n'est pas encore présent.

Pour résoudre un problème, l'élève peut commencer par se donner des images des objets et de la situation du problème; il va «voir» des billes, des personnages, des actions. S'il en reste à ce niveau, il va avoir tendance à résoudre le problème par des stratégies se ramenant souvent à du comptage. Il n'utilisera les opérations que s'il dispose de représentations mathématiques de ces opérations.

Problèmes faisant intervenir le temps

Ces problèmes racontent une histoire se déroulant dans le temps. Les nombres sont structurés par ce déroulement temporel. L'évocation la plus simple est donc une évocation verbale. Nous allons partir de cette évocation verbale, comprendre les services qu'elle peut rendre et les difficultés qu'elle entraîne puis nous passerons à une évocation visuelle.

1. *Recherche de l'état final*

Ces problèmes racontent une histoire avec une situation initiale, une transformation qui aboutit à un état final. C'est le cas du problème suivant: «Jean avait 17 billes. Il en perd 9. Combien en a-t-il maintenant?»

On se trouve dans une situation narrative; on raconte l'histoire de Jean qui se déroule en trois temps: 1° Jean a 17 billes; 2° il en perd 9; 3° on veut savoir combien il lui en reste maintenant.

Les nombres apparaissent dans l'ordre chronologique qui se trouve aussi être l'ordre dans lequel on pose l'opération: $17 - 9 = ?$

L'écriture « 17 - 9 = ? » raconte le problème : Jean a 17, il perd 9, on cherche ce qui lui reste. Le signe – est associé à l'expression « il perd ». La soustraction correspond au verbe d'action « enlever » et le signe « = » exprime l'état final. il y a un lien naturel entre l'écriture de gauche à droite et la séquence d'apparition des nombres.

Le schéma « ❑ – ❑ = ? » représente la structure du problème : les carrés représentent des nombres connus, le « ? » le nombre cherché. Lu de gauche à droite, il décrit dans quel ordre les nombres interviennent dans le problème.

2. *Recherche de l'état initial*

Comparons le dernier problème avec celui-ci :

Jean avait des billes. Il en a gagné 15. Il en a maintenant 22. Combien Jean avait-il de billes ?

Ce problème est beaucoup plus difficile que le précédent. Le nombre cherché intervient au début de la chaîne chronologique. Si l'on exprime le déroulement de l'histoire, on écrit :

? + 15 = 22.

Cette écriture explique que de nombreux enfants disent qu'ils font une addition pour résoudre le problème. Ils essaient de substituer le bon nombre au « ? » dans l'écriture précédente. Les élèves verbaux procèdent plus volontiers de cette façon. Ils n'utilisent pas la soustraction.

Le schéma « ? + ❑ = ❑ » représente la structure du problème.

3. *Recherche de la transformation*

Problème :

Jean avait 42 billes, il en a maintenant 21. Combien en a-t-il perdu ?

En suivant le déroulement chronologique, on écrit :

42 – ? = 21

❑ – ? = ❑ représente la structure du problème.

Ce problème est résolu numériquement par la soustraction 42 - 21. Le lien entre 42 - ? = 21 et la soustraction 42 - 21 n'est pas simple, c'est pourquoi les élèves résolvent plutôt cette équation : 21 + ? = 42.

Cette égalité exprime que la somme des billes qui me restent et de celles que j'ai perdues redonne le nombre de billes que j'avais. Il faut donc s'évader de la structure chronologique de l'énoncé pour reformuler le problème. Nous n'avons pas encore une soustraction, mais une addition incomplète. Il faut même remonter le temps : j'ai encore 21. J'ajoute le nombre des billes que j'ai perdues et j'obtiens le nombre de billes que j'avais, c'est-à-dire 42.

Problèmes ne faisant pas intervenir directement le temps

4. *La soustraction associée à un sous-ensemble*

Ces problèmes décrivent des états. Une évocation visuelle est donc plus directe.

« Il y a 27 élèves dans la classe, 15 sont des filles. Combien y a-t-il de garçons ? »

Nous avons affaire à une description d'un ensemble d'élèves dont on précise un sous-ensemble, celui des filles. On cherche à déterminer le nombre d'élèves constituant le sous-ensemble complémentaire. L'écriture 27 - 15 = ? ne correspond plus à un déroulement temporel. Le signe « = » vient de changer de sens. Il n'exprime plus le résultat de transformations s'inscrivant dans la durée.

Le schéma suivant représente les élèves et, parmi eux, les filles.

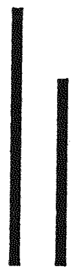
○○○○○○○○○○○○●●●●●●●●●●●●●●●

Le sens de la soustraction apparaît alors : quand on connaît le tout et une partie, elle nous donne l'autre partie.

5. *Comparaison de deux grandeurs*

« J'ai 12 ans. Ma sœur a 17 ans. Quelle est notre différence d'âge ? »

La soustraction mesure une différence : non seulement il n'y a aucune suite de transformations s'inscrivant dans le temps, mais il n'est pas possible de représenter la situation par une inclusion d'ensembles.



La soustraction mesure la différence entre deux grandeurs. Elle en donne une comparaison.

Des situations diverses pour une opération unique

Cas des problèmes faisant intervenir le temps

L'association du verbe « retrancher » à la soustraction ne permet de résoudre directement qu'un seul des cinq problèmes précédents : le premier. Nous allons d'abord reprendre les trois premiers problèmes.

1. Placer les données dans la séquence temporelle

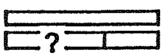
Pour les trois premiers problèmes, nous devons nous assurer que tous les élèves, aussi bien ceux qui sont de dominante verbale ou auditive, pénètrent le sens du problème, et situent convenablement les données de l'énoncé dans le déroulement temporel de l'histoire. Pour cela on peut donner les structures suivantes :

□ – □ = ?
□ – ? = □
? – □ = □
? + □ = □
□ + ? = □

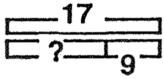
Après avoir précisé le sens des carrés, dans lequel on peut placer un nombre apparaissant explicitement dans le problème, et du point d'interrogation correspondant au nombre cherché, on demande de choisir l'égalité correspondant le mieux au problème posé. Les auditifs, en racontant le problème, vont tenter de le faire « rentrer » dans une de ces égalités. Les visuels vont tenter de faire coïncider chaque égalité avec le problème. Ils vont les balayer successivement jusqu'à ce que la coïncidence soit possible. Ce faisant, ils vont les uns et les autres prendre conscience de la position des données dans la séquence temporelle. L'activité inverse est de même importance : il s'agit d'imaginer des problèmes correspondant à une structure donnée (quel problème peut-on associer à : ❑ - ? = ❑).

La reconnaissance de l'opération ne peut se faire qu'en s'évadant de la structure temporelle. Un moyen de le faire est d'associer chaque problème à une représentation visuelle unique sur laquelle on peut projeter la séquence temporelle tout en voyant dans l'instant la structure générale de la situation.

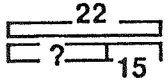
On va donc leur demander de projeter le problème dans une représentation de ce type :



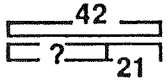
Dans le premier problème, on placera les nombres de cette façon :



Dans le second :



Dans le troisième :



Pour faire cette projection, les élèves doivent avoir pénétré le sens du problème avant, donc avoir replacé les données dans la séquence temporelle ; sinon les élèves pourraient se borner à placer le nombre le plus grand sur la plus grande barre.

Comme activité préalable, on peut donner des problèmes où les mêmes nombres interviennent, dans des problèmes de types 1, 2 et 3. Supposons que ces nombres soient 15 et 7.

Après que la compréhension temporelle du problème a été faite, on demande de reconnaître les données du problème dans cette représentation :

OOOOOOOOOOOOOOO
? OOOOOOO

Dans chacun des cas, le sens de la représentation va être différent : la première ligne va représenter des billes possédées initialement et la seconde les billes perdues. Dans le deuxième cas, la première ligne représente les billes possédées maintenant et la deuxième ligne les billes gagnées. Quant au troisième cas, la première ligne va représenter les billes possédées initialement et la seconde ligne les billes perdues. L'essentiel du travail consiste à donner un sens au schéma en y projetant les données du problème, après que celles-ci ont été structurées séquentiellement.

Dans chacun des cas précédents, la solution est donnée par le complément de 7 à 15, ce qui est justement la définition « linguistique » de la soustraction.

Les problèmes se situant dans l'espace

Il s'agit des deux derniers problèmes. La première évocation doit consister à prendre conscience de la structure spatiale du problème.

1. *Cas d'un problème de sous-ensembles*

« Il y a 27 élèves dans la classe, 15 sont des filles. Combien y a-t-il de garçons ? »

Pour le premier, il faut voir que l'ensemble des filles est contenu dans l'ensemble des élèves et que le complément de cet ensemble est l'ensemble des garçons. C'est cette inclusion qui est porteuse du sens du problème.

Une première difficulté pour les auditifs provient de la variété du vocabulaire correspondant à ce genre de situation. En voici quelques échantillons :

Combien manque-t-il à 50 pour obtenir 84 ?

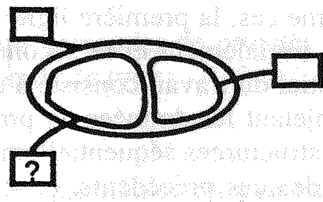
Quel est le complément...

Il y a 27 perles dont...

« X » a 15 perles en trop... en plus...

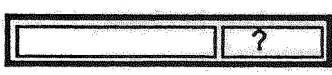
Par exemple : « Bruno a 34 billes. Jacques, François et Bruno devraient avoir le même nombre de billes, mais Jacques a 6 billes de trop. Combien Jacques a-t-il de billes ? »

Toutes ces locutions correspondent au cas où l'on connaît le tout et une partie et que l'on cherche l'autre partie, ce qui se représente par une représentation ensembliste.



La mise en parallèle du texte et du graphique oblige à la traduction de l'un dans l'autre. L'auditif va apprendre à prolonger par des schémas le sens qu'il donne aux mots, le visuel va apprendre à mettre des mots sur des graphiques. Bien que l'un et l'autre partent de points opposés, c'est au moment de la traduction et de l'association que le sens se fait.

Une fois la situation convenablement évoquée, on peut chercher à la représenter de cette façon :



Il faut bien noter l'ambiguïté de toutes ces représentations. Chacune peut être interprétée à faux. Il ne faut pas croire que l'image, à elle seule, explique. C'est le travail de traduction du problème en une représentation qui est source de sens, non la représentation graphique elle-même.

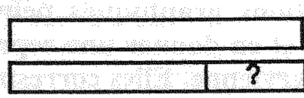
La structure suivante correspond encore au problème :

□ + ? = □

2. *Cas d'un problème de comparaison*

« J'ai 12 ans. Ma sœur a 17 ans. Quelle est notre différence d'âge ? »

La situation peut directement se représenter par :



La structure □ + ? = □ correspond au problème.

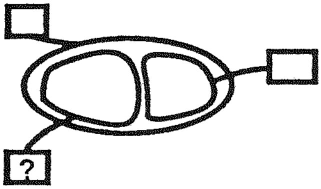
FAISONS LE POINT : LE LANGAGE INTÉRIEUR RATTACHÉ À LA SOUSTRACTION

1. Le langage intérieur comprend les structures numériques suivantes, qui se lisent de gauche à droite.

□ – □ = ?
□ – ? = □
? – □ = □
? + □ = □
□ + ? = □

Par association au problème, elles permettent de prendre conscience de la position des données dans la séquence temporelle de l'énoncé.

2. Il comprend les représentations mathématiques suivantes :



Ces représentations graphiques peuvent être associées au problème et en donner une représentation sans que le temps n'intervienne. Elles correspondent toutes à $\square + ? = \square$

Les représentations 1 et 2 sont des outils de traduction.

3. Il comprend la définition de la soustraction dans la langue mathématique en la rattachant à l'addition :

Calculer $\square - \square = ?$, c'est résoudre $\square + ? = \square$

Verbalement, c'est faire le lien entre retrancher et ajouter : pour obtenir 12, j'ajoute 7 à 5. Pour obtenir 5, je retranche (j'ôte, je perds, j'enlève...) 5.

4. Il comprend le sens donné aux deux phrases :

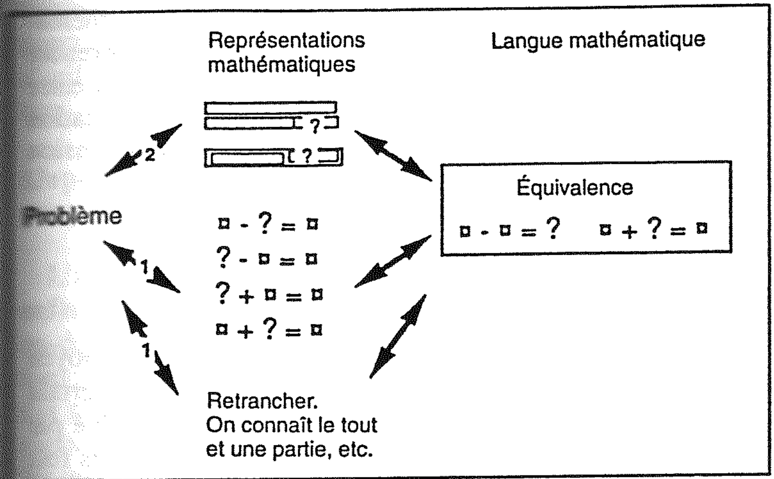
– Quand on enlève (retranche, ôte...), on soustrait.

– Quand on connaît le tout et une partie, la soustraction permet de trouver l'autre partie.

5. Il contient les équivalences entre la colonne de gauche et l'expression de droite.

$$\left.\begin{array}{l} \square - ? = \square \\ ? - \square = \square \\ ? + \square = \square \\ \square + ? = \square \end{array}\right\} \quad \square - \square = ?$$

On peut résumer la situation de cette façon :



L'évocation du problème se fait à travers les représentations mathématiques. L'évocation (1) structure l'aspect séquentiel du problème, l'évocation (2) structure l'aspect spatial. Une autre évocation peut suivre et rattacher les représentations mathématiques à la langue mathématique.

LA MULTIPLICATION

Pour continuer à explorer le langage intérieur mathématique, sa nature et son fonctionnement, nous allons prendre prétexte de la multiplication pour faire la distinction entre représentation et concrétisation, et aborder l'utilisation d'algorithmes comme fondements à la compréhension d'objets mathématiques.

Multiplication : définition à l'intérieur de la langue mathématique

La multiplication est d'abord définie comme un moyen commode de représenter une addition répétée un certain nombre de fois. Par exemple 2 + 2 + 2 va être résumé par 3 × 2 qui se prononce de la façon la plus simple « trois fois deux ». Il y a une dissymétrie entre les deux nombres 3 et 2 : le 3 indique le nombre de répétitions et le 2 le nombre répété. Cette lecture correspond au sens courant du mot « fois » : Je prends « trois fois du thé » signifie que l'on prend successivement trois tasses de thé ; « trois fois deux » signifie donc que l'on prend « trois fois le nombre deux ».

Il est étonnant de voir que certains manuels « tordent » le français et donnent comme sens à « trois fois deux » « trois – fois deux », « fois deux » voulant dire « multiplié par deux ». Le français possède en effet deux expressions pour lire l'écriture mathématique 3 × 2 : l'une, « trois fois deux », fait de 3 l'opérateur et de 2 l'état sur lequel l'opérateur agit. L'autre « 3 multiplié par 2 » fait de 2 l'opérateur et de 3 le nombre sur lequel agit l'opérateur. La première expression est plus courante, la seconde plus mathématique et doit être abordée plus tard.

Alors que la langue mathématique écrite est cohérente, dès qu'elle est « parlée », elle se trouve interprétée et elle devient ambiguë, ambiguïté normale et qui lui donne toute sa richesse, mais ambiguïté qui en fait une langue difficile « à parler ».

Les élèves doivent parvenir à considérer la multiplication comme une opération autonome et non pas seulement comme une addition répétée. Pour cela, ils doivent apprendre à connaître les tables qui vont leur permettre d'utiliser la multiplication sans faire une référence à l'addition.

L'apprentissage des tables est indispensable pour donner un « sens linguistique » à la multiplication

L'apprentissage des tables semble souvent difficile aux enfants. La calculette aidant, certains élèves ne savent rien au-delà de la table par 2, qui semble faire partie de la culture populaire. Sans les tables de multiplication, pas de calcul mental même élémentaire possible, et surtout pas de rapports ni comparaisons entre nombres. Les nombres et les quatre opérations constituent le noyau autour duquel est construit le reste de la langue mathématique. L'apprentissage des tables est donc toujours aussi indispensable à l'époque de la calculette, non pas pour calculer mais pour apprendre les rudiments d'une langue assurant la compréhension du reste de l'édifice mathématique.

Apprendre une table n'est pas chose difficile et certains éléments de gestion mentale peuvent facilement aider à le faire. L'apprentissage d'une table pour la grande majorité des enfants ne doit pas prendre plus que quelques minutes. Voici comment procéder.

Méthode auditive pour apprendre les tables

Ces procédés sont valables pour des enfants de neuf ans et plus. Notre description suppose la présence d'un « moniteur » qui peut être un parent, un ami ou un enseignant.

Le moniteur écrit la table à apprendre sur une feuille qu'il est seul à voir, la table de 7 par exemple. Il énonce un résultat : $7 \times 5 = 35$. L'élève répète tout haut « sept fois cinq trente-cinq », ensuite il écoute sa voix intérieure redire « sept fois cinq trente-cinq », puis il redit tout fort « sept fois cinq trente-cinq ». Le moniteur place un point sur sa feuille en face de $7 \times 5 = 35$. Il saura ainsi que ce résultat a été traité et immédiatement il énonce un autre résultat : $7 \times 9 = 63$. L'élève procède de la même façon. Le moniteur redemande 7×9, puis 7×5 et il énonce un troisième résultat. Il est important que le rythme soit rapide. Dès que l'élève finit de parler, le moniteur enchaîne. Il faut empêcher l'élève de se dire « sept fois trois, c'est $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ » et d'essayer de faire la somme de façon itérative. Les auditifs surtout sont portés à faire des sommes successives et c'est souvent ce qui les empêche d'apprendre la table. Il faut donc bloquer ce processus par un rythme qui peut dépendre de chacun, mais qui doit toujours être rapide.

Si cette façon de faire n'aboutit pas, ce peut être que l'élève a besoin non seulement de se dire et d'écouter sa voix intérieure, mais en même temps de voir mentalement les nombres se former dans sa tête. On lui demande alors de prolonger l'énoncé qu'il se fait par l'image des nombres en train de s'écrire. On s'aperçoit très vite si cet ajout au processus initial est efficace ou non.

Apprentissage visuel de la table de multiplication

Enfin si ce procédé ne fonctionne toujours pas, il se peut que l'élève ait besoin d'images d'abord. Dans ce cas, le moniteur lui demande de se former l'image d'un écran mental. Il fait préciser la couleur de l'écran, des bords et la couleur du crayon écrivant sur cet écran.

L'élève va écrire la table sur son écran mental, dans l'ordre habituel. Il peut le faire avec l'aide du moniteur qui énonce le résultat à écrire ou simplement en se faisant une copie mentale de la table écrite sur une feuille. Certains vont pouvoir écrire trois ou quatre résultats seulement à la fois, d'autres vont pouvoir écrire toute la table d'un seul coup. Une fois ce travail terminé, le moniteur pose des questions. L'élève lit la réponse sur son écran mental. Dans le cas où il a écrit la table en trois séquences de trois résultats, il choisira la bonne séquence puis lira le résultat.

Si l'élève se trompe, il est possible qu'il doive faire le geste mental d'effacer complètement son écran mental et qu'ensuite il doive tout réécrire.

En procédant d'une façon ou d'une autre, une table s'apprend en moins de dix minutes dans plus de 90 % des cas. Une heure plus tard, on vérifie que la mémorisation a bien été faite. Si c'est le cas, la table est sue. Cependant, c'est l'élève qui doit juger du succès de son apprentissage. Certains ont tellement peu confiance en eux que l'essentiel est de leur faire réciter leur table jusqu'à ce qu'ils admettent qu'ils la savent. Ils s'imaginent incapables d'un pareil exploit.

Deux jours plus tard, on peut en apprendre une autre de la même façon et ainsi de suite.

Un succès dans l'apprentissage des tables peut changer l'attitude d'élèves en difficulté en mathématiques. Ce premier succès les délivre de la honte confuse de ne pourvoir apprendre ce qui leur semble pourtant élémentaire.

Sans rentrer dans les détails, il suffit de comparer les 3 problèmes suivants pour observer que la multiplication peut, comme la soustraction, être associée à des processus fort différents :

1. J'ai 2 sacs de gâteaux. Dans chaque sac, il y a 3 gâteaux. Combien ai-je de gâteaux au total ?

2. Calculer l'aire d'un rectangle de 3 cm par 2 cm.

3. Chaque jour, je gagne 40 F. Combien aurai-je au bout de 3 jours ?

Chacun de ces problèmes correspond à une situation différente : les gâteaux sont dans les saces (inclusion) : chaque jour est associé à une somme d'argent ; le rôle des deux nombres dans le calcul d'aire est parfaitement symétrique. Le lien avec la multiplication ne peut se faire que si chaque problème est transformé et représenté de façon à ce qu'on puisse reconnaître la mutliplication originale. On peut aussi partir de la multiplication et la projeter dans ces situations différentes. Traduire et projeter, voici deux gestes mentaux qui peuvent conduire à la compréhension du problème.

Compréhension algorithmique d'expressions utilisées en mathématiques

Certaines expressions comme « avoir autant », « avoir trois fois plus », « trois fois moins », sont sources de confusion et le demeurent. On peut les expliquer, les définir, mais cela ne suffit généralement pas. On peut aussi associer ces locutions à des suites ordonnées d'actions (des algorithmes). Le sens de l'expression sera alors rattaché à ces algorithmes.

J'ai deux photos. Mon ami en a trois fois plus. Combien mon ami a-t-il de photos ?

Trois fois plus : c'est une comparaison multiplicative, donc un premier pas vers la proportion. Il s'agit d'une mesure comparative de ce que l'un possède par rapport à l'autre. Le temps n'intervient pas. Il faut « voir » en même temps ce que je possède et ce que possède mon ami. Ce sens de la multiplication peut être rapproché de celui de la soustraction vue comme un moyen de comparaison.

L'expression « trois fois plus » est fort ambiguë : on entend « plus » et « fois » ; un terme se rattache à l'addition et l'autre à la multiplication : situation peu claire s'il en est.

Le pendant de l'expression « trois fois plus » est « trois fois moins », qui veut dire qu'il faut diviser par trois.

Le sens de telles expressions ne peut provenir que d'un apprentissage scolaire. Ce genre d'expression est particulièrement incompris dans les milieux les plus culturellement défavorisés.

Pour donner un sens à l'expression « trois fois plus », on peut d'abord expliquer <u>comment</u> construire un ensemble « trois fois plus grand qu'un autre ». Ensuite on schématisera cette construction.

On peut imaginer des algorithmes correspondant pour

« fois moins » et « autant ». La compréhension de ces mots est à la base du concept du nombre et de la proportionnalité.

De nombreuses notions mathématiques peuvent être acquises de cette façon, quel que soit le niveau où on se place :

1. Acquisition d'un algorithme, en respectant les capacités évocatives de chacun.
2. Représentation de ce qui a été fait schématiquement et verbalement.
3. Introduction du vocabulaire particulier.
4. Évocation du vocabulaire en association à l'algorithme, la représentation ou la verbalisation.

Au-delà du vocabulaire, l'apprentissage d'algorithmes est un moyen puissant d'acquisition de concepts : apprendre à construire des triangles semblables peut être, par exemple, un moyen d'acquérir ensuite le concept de similitude. L'algorithme s'apprend facilement. Une fois intériorisé, il devient une référence interne à laquelle on peut se référer. Cette approche revient à répondre à la question « comment ? » avant « pourquoi ? ». L'essentiel est de faire le lien entre ces deux questions. Une acquisition nouvelle se fait à partir d'acquisitions déjà faites. Savoir suivre un algorithme peut constituer une réalité qui n'est pas moins noble qu'une autre et qui peut légitimement servir de base à une compréhension conceptuelle.

LES REPRÉSENTATIONS ET LES CONCRÉTISATIONS

Des schémas peuvent être des modèles simplifiés de situations concrètes. Ils peuvent aussi exprimer des relations mathématiques n'ayant de réalité qu'intériorisées. La confusion entre ces deux schématisations est source d'incompréhension. C'est ce que nous allons voir à partir des situations associées à la multiplication à travers des changements d'unités.

Les changements d'unités

Cas 1 : représentation de OA, « objet concret »

Nous partons de la situation suivante : nous avons une longueur OA fixe et nous voulons la mesurer avec une unité. Avec cette unité, OA mesure 3.

Figure 1

Figure 2

Si on change d'unité et si nous prenons une unité deux fois plus petite, la mesure de OA qui était 3 va être 6. Dans chaque unité « ancienne », il y a maintenant deux unités « nouvelles ». Cette description verbale de la situation fait appel au temps (avant, après, unité ancienne, unité nouvelle). Elle demande aussi d'avoir bien compris le sens de l'expression « fois plus ».

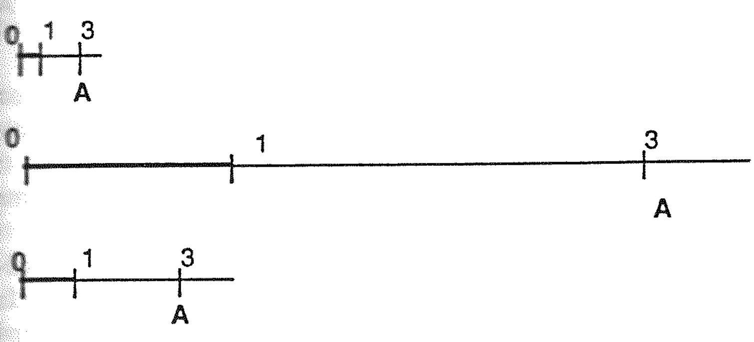
Cette situation peut se schématiser facilement. La longueur OA étant donnée, on la mesure avec une première unité, on change d'unité et on obtient une nouvelle mesure. OA représente une même longueur concrète et doit être représentée de la même façon dans les deux cas (fig. 1 et 2).

Cependant cette représentation masque un fait important : celui qui regarde les deux figures voit bien que la « longueur » OA n'a pas changé. Pourtant, quand l'unité diminue, le nombre qui mesure cette longueur inchangée augmente. Beaucoup d'élèves ressentent comme une contradiction le fait que ce qui mesure 1 (en km) mesure 1000 (en mètres), le nombre étant beaucoup plus grand quand l'unité diminue.

Cas 2 : représentation du rapport de OA à l'unité, notion mathématique

On part de l'expression « OA mesure 3 unités ». Cette expression établit une relation entre OA et l'unité.

Étant donné qu'il ne s'agit que d'une relation entre OA et une « unité », l'unité elle-même n'est pas précisée. On peut donc faire varier l'unité et représenter différemment la même expression : « OA mesure trois unités. »

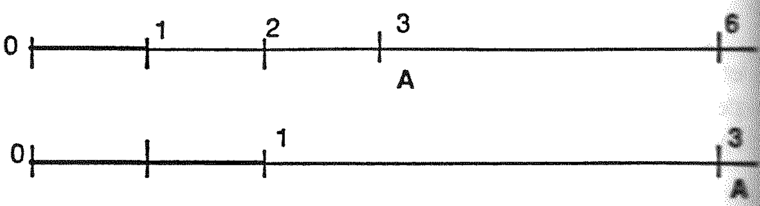


Tant qu'on ne précise pas l'unité, tous les graphiques ci-dessus représentent l'expression « OA mesure 3 unités ». Nous ne nous intéressons plus à la longueur physique de

OA, mais simplement à la relation numérique entre l'unité et OA. Une relation se représente par une classe de concrétisations. La relation mathématique est la propriété commune à toutes ces concrétisations.

Les graphiques ci-dessus correspondent bien à l'expression «trois fois plus». Nous ne partons plus cette fois d'une situation concrète, mais d'une relation intériorisée exprimée verbalement et pouvant se représenter graphiquement de façons multiples. Le rapport entre le graphique et l'expression verbale est inversée: dans le premier cas (cas 1), le schéma représente une situation concrète et constitue un point de départ externe. Dans le second cas, le schéma vient décrire une relation numérique intériorisée exprimée verbalement.

Rien n'empêche de faire varier la longueur de OA:



Le second graphique exprime bien la même relation entre l'unité et OA, mais il montre aussi que l'unité est deux fois plus grande.

Si l'on mesure la représentation de OA dans le deuxième cas avec la première unité, OA mesure 6.

Si la représentation est correcte du point de vue numérique, elle masque cependant le fait de la conservation de la mesure de OA. Si l'on s'en tient à l'aspect visuel, aucune des deux représentations (cas 1 et cas 2) ne rend compte complètement de la «réalité». Dans le cas 1, nous rendons compte d'une réalité concrète, dans la seconde nous rendons compte d'une réalité conceptuelle.

Représentation d'une situation concrète et concrétisation d'une relation mathématique

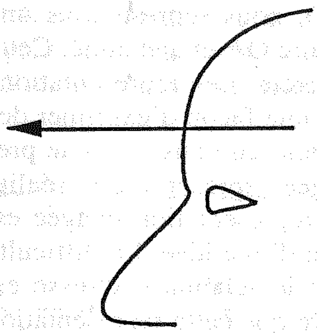
La première représentation (cas 1) concernait une situation concrète : un segment OA était mesuré à partir d'une unité donnée. Le segment OA était une donnée extérieure qui ne pouvait être modifiée. Ce segment était mesuré à partir d'une unité. On pouvait changer d'unité et mesurer le segment de nouveau. Nous avons une séquence totalement concrète : un objet (le segment OA) et l'action de mesurer. On peut donc se représenter toute la séquence à partir de l'observation, en « faisant attention ».

Dans le deuxième cas (cas 2), nous représentons une relation entre un segment imaginaire OA et une unité. Cette relation n'a pas d'existence concrète. Les représentations dessinées que nous donnons sont une façon d'exprimer des relations mathématiques qui existent en nous. Dans le premier cas, la représentation imagée représente une réalité objective, dans le second cas la représentation imagée est une concrétisation, une projection d'une idée. La difficulté d'interprétation pour celui à qui le schéma s'adresse est alors très grande, car il peut croire que cette représentation renvoie à une situation concrète, ce qui n'est pas le cas.

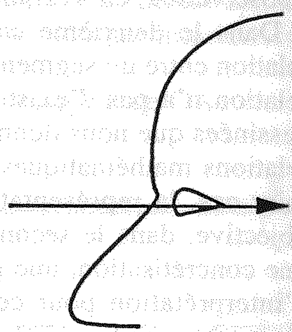
Du point de vue pédagogique, ces deux classes de représentations doivent être distinguées : les premières représentations peuvent être données par l'enseignant comme point de départ. Les représentations de la deuxième classe ne peuvent être imposées de l'extérieur. Des représentations du même genre doivent d'abord avoir été produites par l'élève à partir d'une relation qu'il aura d'abord intériorisée. Alors seulement, l'enseignant pourra les utiliser sans risque de confusion.

Une représentation visuelle peut donc renvoyer soit à une situation concrète, soit à une relation mathématique n'ayant de réalité que mentale. Une des difficultés de l'enseignement des mathématiques provient de cette ambiguïté. L'élève croit voir un objet concret là où il devrait voir un objet mathématique. Mettons-nous à sa place : pour qu'il puisse voir dans la représentation un objet mathématique au lieu de l'objet concret, il faudrait qu'il connaisse cet objet mathématique. S'il ne le connaît pas, la représentation imagée risque de créer un malentendu durable. L'élève verra des « choses » quand il devrait voir des « relations ».

On appellera donc *concrétisation* le cas où un schéma représente une relation intériorisée, et *représentation*, le cas où le schéma est une certaine description d'une situation concrète.



Concrétisation : projection d'une relation intériorisée dans un schéma.

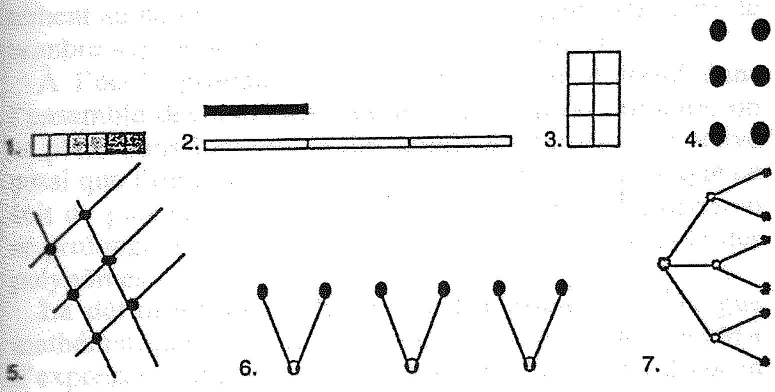


Représentation : construction d'un schéma à partir d'une situation externe.

Pour résoudre un problème, on doit savoir faire des concrétisations de relations intériorisées aussi bien que représenter des situations externes. L'activité mentale dans les deux cas est fort différente. On demande plus souvent de faire des représentations plutôt que des concrétisations, bien que les deux activités mentales soient essentielles. Pourtant on peut facilement demander de produire des « concrétisations » : comment représenter qu'une longueur est trois fois plus grande qu'une autre, qu'un nombre est le tiers d'un autre. Les schémas vont être différents d'un élève à l'autre : on pourra avoir des lignes, des points, des surfaces.

Donner un sens à des représentations mathématiques

Une représentation mathématique est à la fois « représentation » et « concrétisation ». Elle peut être utilisée pour schématiser une situation concrète, mais aussi pour exprimer une structure mathématique. On pourra s'amuser à donner un sens à ces représentations mathématiques reliées à la multiplication, et à trouver des problèmes différents qu'elles peuvent représenter. Comment faciliter le travail de projection de la multiplication dans ces différentes situations ?



LANGAGE INTÉRIEUR ET DYNAMIQUE MENTALE

Cet exemple illustre aussi la dynamique du travail de représentation en mathématiques. Autant la représentation des situations concrètes doit être précise, autant il faut s'évader du concret en utilisant des représentations symboliques et en imaginant des actions virtuelles. On imagine des déplacements, des actions, des événements non réalisés, mais conduisant à la même représentation mathématique. Sur l'arbre, il est possible d'imaginer une succession d'événements qui ne se sont pas produits. On peut aussi y voir une représentation globale en dehors du temps. Une représentation mathématique offre la possibilité d'imaginer pour aller vers une solution. Le langage intérieur mathématique n'est pas une collection de photos inertes ou d'énoncés figés, mais au contraire un support à l'imagination et à la mise en évidence de relations nouvelles.

LA DIVISION

Définition et sens de la division à l'intérieur de la langue mathématique

La division est l'opération inverse de la multiplication. Si l'on se place dans l'ensemble des nombres entiers naturels, diviser le nombre naturel « a » par le nombre naturel « b » c'est déterminer un nombre naturel « q », quand cela est possible, de telle sorte que a = bq. Le nombre « b » est appelé le diviseur, le nombre « a » le dividende et le nombre « q » le quotient.

Toujours du point de vue de la langue mathématique, la division euclidienne du nombre entier naturel « a » par le nombre entier naturel « b » consiste à déterminer un couple (q, r) de telle sorte que a = bq + r, avec « r » inférieur strictement au nombre « b ». On appelle « quotient euclidien » le nombre « q » et « reste euclidien » le nombre « r ».

À l'école primaire, la division se situe d'abord dans l'ensemble des nombres naturels. À la fin du primaire, on se place dans l'ensemble des nombres décimaux. Il arrive aussi que l'on parle de « division de fractions », bien que ce soit de plus en plus rare. À l'école secondaire, la division se prolongera en particulier sur l'ensemble des réels et des polynômes.

La définition de la division à l'intérieur de la langue mathématique conduit à chercher le « terme manquant » d'expressions du type ❑ × a = b ou a × ❑ = b. La division est de cette façon rattachée à la multiplication. Ce lien entre cet objet nouveau, la division, et l'objet déjà connu, la multiplication, est donc porteur de sens à l'intérieur de la langue mathématique.

Cependant la langue mathématique est une langue écrite et, dès qu'on la parle, on passe déjà dans le domaine de l'interprétation. L'écriture 3 × 4 = 12 va avoir un sens différent si elle est projetée « auditivement » ou « visuellement » dans la réalité concrète.

1. Compréhension verbale : l'opération décrit une action

Les élèves ayant une compréhension auditive ou verbale ont tendance à placer leur compréhension dans le temps, et ils vont souvent imaginer facilement une suite d'actions associées à une opération.

Il y a une grande différence entre rechercher le terme manquant dans $a \times \square = b$ et dans $\square \times a = b$. Pour la grande majorité, la recherche du terme manquant dans le deuxième cas est beaucoup plus difficile que dans le premier cas, et la raison vient du sens donné à la multiplication.

Pour un élève qui a une compréhension auditive, l'écriture 3×4 se dit « 3 fois 4 » et évoque l'addition répétée 3 fois de 4 éléments. Le nombre 3 est associé à un opérateur agissant sur un autre nombre 4. Si l'action n'est pas précisément déterminée, c'est-à-dire si le nombre d'additions répétées n'est pas donné, comme l'évoque l'écriture $\square \times a = b$, la situation semble beaucoup plus compliquée que dans le cas contraire. Voici comment vont procéder des enfants ayant une compréhension auditive ou verbale pour trouver le terme manquant de $\square \times 7 = 56$:

1. ils inversent l'ordre des termes et cherche le terme manquant de $7 \times \square = 56$;
2. ils trouvent 8 en s'appuyant sur la table de multiplication ;
3. ils utilisent la commutativité : 7×8 donne le même résultat que 8×7 ;
4. le terme manquant est donc 8.

2. Compréhension visuelle : référence à la table

Pour de nombreux visuels, la situation est souvent différente. La table de multiplication a une valeur de vérité qui se suffit quelquefois à elle-même. C'est une règle commode. Ils apprennent souvent plus facilement leurs tables parce qu'ils ne cherchent pas à évoquer des actions derrière la litanie des nombres. La recherche du terme manquant peut donc se faire plus rapidement et aussi bien dans un sens que dans l'autre. Pour eux, 3 fois 4 peut vraiment être la même chose que 4 fois 3 puisque le résultat est le même et que le mot « fois » n'a pas la même force d'évocation pour eux que pour les auditifs.

Dans le cas des auditifs ou des verbaux, la table est « lue » ou « entendue », alors que, dans le second cas, elle est « vue ». La première compréhension est séquentielle et l'ordre est important. Dans la seconde, le temps n'intervient pas et la multiplication est comprise globalement.

Les diverses projections de la division dans les situations concrètes

La division est reconnue comme une opération distincte de toutes les opérations déjà rencontrées si les élèves peuvent lui associer clairement au moins un processus distinct. Comme toutes les opérations mathématiques, plusieurs processus peuvent être associées à cette opération.

La division est d'abord associée au partage : j'ai 12 objets. Je les partage en trois tas égaux. Chaque tas contient 4 objets. Si l'on veut prévoir le nombre d'objets qui vont se trouver dans chacun des trois tas égaux, la division va s'appliquer et nous fournir le résultat : $3 \times ? = 12$

À cette association entre division et partage va se substituer, pour la majorité des enfants de 9-10 ans, une autre association, celle entre la division et le regroupement : l'opération 12 : 3 sera plus volontiers associée au regroupement des 12 objets en tas de trois. La même équation mathématique va nous permettre de trouver le nombre de tas de trois objets que l'on peut faire avec douze objets : $3 \times ? = 12$.

La division peut donc se projeter dans deux situations très différentes. Dans la première, on sépare les objets en un nombre déterminé de tas égaux (trois) et l'on cherche le nombre d'éléments contenu, dans chaque tas. Dans la seconde, on détermine comment faire un tas (avec trois éléments) et l'on cherche le nombre de tas qui constitue le résultat numérique. Le français distingue ces deux projections : dans le premier cas on partage en trois, dans le second on partage par trois.

Ces deux façons de procéder correspondent à une seule opération mathématique : la division. Remarquons cependant que l'on peut diviser « à gauche » et « à droite », ceci correspondant à une multiplication elle aussi « à droite » et « à gauche ».

Division à droite : on cherche le terme manquant de $3 \times ? = 12$.

Division à gauche : on cherche le terme manquant de $? \times 3 = 12$.

Si, dans l'ensemble des nombres naturels, la commutativité de la multiplication nous assure de l'équivalence numérique des deux résultats, ces deux opérations vont se projeter de façons différentes dans les situations concrètes : si $3 \times 4 = 12$ se lit « 3 fois 4 égale 12 », « 3 fois » joue le rôle d'un opérateur sur 4. Cela peut se représenter par 3 tas de 4 objets. Si l'un des deux termes est inconnu, on peut avoir deux situations :

– Dans la première, c'est le terme de gauche que l'on cherche. On a donc $? \times 4 = 12$. L'opérateur est inconnu, ce qui correspond au nombre de tas. On sait par contre que les tas sont constitués de 4 éléments. On est donc dans une situation de regroupement.

– Dans la seconde, c'est le terme de droite que l'on cherche. On a donc $3 \times ? = 12$. Cette fois on connaît l'opérateur, donc le nombre de tas, et l'on cherche le nombre d'éléments par tas. Nous sommes donc dans une situation de partage.

Si nous avions traduit l'expression mathématique par l'expression française « 3 multiplié par 4 », nous aurions donné une interprétation symétrique à l'écriture mathématique et l'interprétation que nous venons de faire serait, elle aussi, symétrique. Alors que l'écriture mathématique est parfaitement rigoureuse, le sens de cette écriture est multiple : nous sommes maintenant habitués à cette constante de la langue mathématique qui la rend à la fois riche et délicate dans son application.

Cette ambiguïté peut devenir source d'incompréhension entre enseignants et élèves. La division est d'abord présentée comme un partage. Si le partage décrit facilement le résultat d'une division, il ne donne pas de moyen simple d'effectuer ce partage : pour partager 32 cartes entre 4 personnes quand on ne connaît pas le résultat de la division 32 : 12, il faut les distribuer une à une ; ce qui est moins direct que de faire des tas de 4, donc de les regrouper. Le regroupement est donc aussi un moyen simple de faire un partage. C'est d'ailleurs ce qui se passe quand on enseigne comment faire une division. Les enfants apprennent à dire « en 12 combien y a-t-il de fois 4 ? », autrement dit, combien de tas de quatre puis-je faire avec 12. On donne donc un moyen de regrouper. Il est intéressant de constater que l'on croit justifier dans l'esprit des élèves l'algorithme de la division alors qu'on justifie par le regroupement ce qu'on a défini par le partage.

Les enfants, dans leur majorité, substituent progressivement le regroupement au partage même si on ne leur parle jamais de regroupement. Comme nous avait dit une élève de 9 ans qui associait uniquement division et regroupement et à qui j'expliquais que, pour moi, ce pouvait être aussi un partage : « Je comprends bien ce que tu dis, mais ma façon est bien plus commode dans les problèmes. »

Cette élève donnait la clé de la substitution spontanée du partage au regroupement, même dans des classes où l'enseignant n'associe pas lui-même division et regroupement : le regroupement est un moyen, alors que le partage est considéré comme une définition ; ce qui leur permet d'agir est plus fort pour eux que ce qui leur est dit. Il est remarquable aussi que la prise en compte d'un processus tende à annihiler l'autre : très rares sont les élèves qui ont conscience que la division peut se projeter comme un partage et comme un regroupement.

Ensuite, à la fin du secondaire, la division ne devient plus qu'une opération purement numérique dans l'esprit des élèves. L'idée de regroupement disparaît parce qu'on ne leur en parle jamais. Seule reste une vague idée de partage ; et dans les situations concrètes, en physique ou en chimie, ils ne reconnaîtront plus le sens de la division : c'est une des causes des difficultés de compréhension rencontrées dans ces deux disciplines.

Autres sens dérivés de la division

Si le regroupement et le partage sont les deux processus qui donnent un sens à la division, chacun d'eux peut prendre une coloration différente. Voici quelques exemples.

La soustraction répétée

C'est une autre façon d'envisager le regroupement : pour faire la division par n, au lieu de « faire des tas » de n objets jusqu'à ce que tous les objets soient répartis dans les tas égaux, on enlève n objets jusqu'à ce que tous les objets aient été enlevés. Le nombre de « tas » correspond au nombre de fois où n objets ont été enlevés.

C'est le processus qui est généralement associé aux algorithmes permettant de faire le calcul : on ne fait pas référence à des objets, mais simplement aux nombres. Pour diviser 12 par 3, on enlève 3 de façon répétitive jusqu'à ce que l'on ne puisse plus le faire. Le résultat est donné par le compteur qui cumule le nombre de soustractions effectuées.

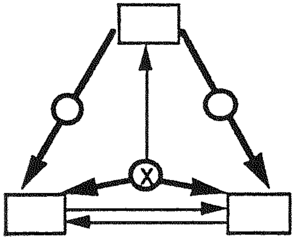
Ce sens donné à la division correspond à l'opération inverse de la multiplication vue comme une addition répétée.

Cas où l'opération fait intervenir des grandeurs de nature différente

Certaines applications de la division font intervenir des grandeurs de nature différente : une aire et une longueur par exemple. Quand on connaît une aire et une longueur, nous allons obtenir comme résultat la mesure d'une autre longueur.

Alors que la multiplication associée au calcul d'une aire se représente mentalement assez facilement (le nombre d'éléments contenus dans une rangée multiplié par le nombre de rangées), les enfants ne font pas appel à une représentation du même type pour la division. C'est parce que la division est considérée comme l'opération inverse de la multiplication qu'elle nous donne le résultat : on connaît la formule donnant l'aire d'un rectangle ($A = l \times L$). Pour calculer l connaissant L, on va diviser A par L. On se place donc directement à l'intérieur de la langue mathématique, sans référence à aucun processus concret. Nous avons là un exemple de la nécessité d'abandonner la représentation concrète et de se placer au niveau de la langue pour résoudre le problème. Ce décollage doit devenir conscient pour qu'il y ait encore sens.

On peut représenter la relation entre les trois nombres L, l et A (longueur, largeur, aire) d'une part par le graphique de gauche et d'autre part par les trois égalités de droite. Tenter d'établir le lien entre ces deux représentations met en évidence la structure numérique utile pour trouver la largeur quand on connaît l'aire et la longueur du rectangle.



$l \times L = A$
$l = A : L$
$L = A : l$

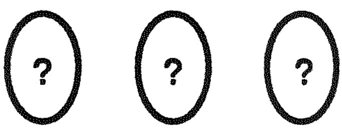
n fois moins : comparaison

Cette expression est symétrique de l'expression « *n* fois plus ». Elle ne fait explicitement référence à aucun processus concret particulier mais simplement à une relation numérique. Elle est aussi ambiguë que « *n* fois plus », puisqu'elle fait cohabiter les mots « fois » et « moins ».

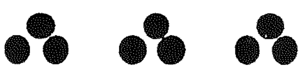
Une expression comme « 3 fois moins » est pourtant très importante car elle exprime une comparaison entre deux ensembles. Diviser en trois (division partage), c'est faire trois paquets. On considère encore globalement tous les éléments. Leur organisation a changé. Au lieu de constituer un bloc, ils sont maintenant répartis en trois paquets. Le résultat de la division nous donne le nombre d'éléments par paquet, mais nous continuons à considérer tous les éléments de l'ensemble de départ. Par contre, si Jacques a trois fois moins que Pierre, il faut considérer que Pierre et Jacques ont des êtres différents et que si Jacques en avait « trois fois plus », il en aurait le même nombre (autant) que Pierre, ou encore que si l'on divisait le nombre d'éléments en possession de Pierre (division partage), un des paquets obtenus aurait le même nombre d'éléments que celui de Jacques.

Quelques représentations mathématiques associées à la division

Une des difficultés principales concernant le sens de la division provient de la distinction entre partage et regroupement. Voici deux schémas exprimant cette différence :

1 

PARTAGE

2  ....? REGROUPEMENT

Le premier exprime que l'on connaît le nombre de paquets, mais que l'on ignore le nombre d'éléments par paquet. Le second exprime que l'on connaît le nombre d'éléments par paquet, mais que le nombre de paquets est inconnu. Chaque schéma doit être évoqué, puis son sens soigneusement précisé : où sont placés les « ? » dans chaque schéma ? Pourquoi ? Il y a trois paquets dans le premier cas, dans le second cas, trois disques dans chaque tas, mais ce nombre trois ne représente pas trois éléments dans la réalité, il marque simplement le fait que l'on connaît le nombre de paquets ou d'éléments par paquet.

Ces schémas peuvent être d'un grand secours pour les visuels en particulier : ils lisent le problème et tâchent de voir s'il est représentable par un schéma de type 1 ou de type 2. Ils peuvent alors décider s'il s'agit d'un problème de regroupement ou de partage.

Les élèves auditifs pourront apprendre les deux phrases suivantes :

« Un partage, c'est quand je connais le nombre de paquets et que je cherche le nombre d'éléments contenus dans chaque paquet. »

« Un regroupement, c'est quand je connais le nombre d'éléments contenus dans chaque paquet et que je cherche le nombre de paquets. »

Devant un problème, ils vont tenter de faire coïncider la première phrase ou la seconde avec le problème à résoudre.

Ils peuvent aussi simuler le processus de regroupement (faire des tas en connaissant le nombre d'éléments par tas) et le partage qui consiste à distribuer les éléments un à un comme on distribue des cartes à jouer.

L'intériorisation d'une de ces trois descriptions du regroupement et du partage (visuelle, verbale et kinesthésique) va permettre à l'élève de décider du type de problème rencontré et donc de le « comprendre ».

Faisons le point

Pour évoquer ou résoudre un problème, il faut souvent imaginer des «actions virtuelles» qui vont en transformer le sens et offrir des possibilités nouvelles de solution.

Il faut distinguer entre représentation et concrétisation : une concrétisation consiste à représenter par un schéma une relation intériorisée, alors qu'une représentation consiste à représenter par un schéma une situation externe.

La division, comme bien d'autres opérations mathématiques, peut être associée à des processus différents : ici il s'agit du regroupement et du partage. Une partie du sens de la division provient de la possibilité de l'associer à l'un et à l'autre de ces processus.

D'autres processus peuvent être associés à la division, mais ils sont dérivés des deux précédents, comme la soustraction répétée par exemple.

La division, comme la soustraction et la multiplication, peut constituer un critère de comparaison.

La division peut faire intervenir des grandeurs de nature différente comme aire et longueur (ou temps et distance, etc.). Dans ces cas, la compréhension de l'opération oblige à abandonner les processus concrets, qui n'ont plus de sens, pour se placer au niveau de la langue mathématique. Alors, la division est simplement l'opération inverse de la multiplication.

Ce principe est général : un objet mathématique doit pouvoir être associé à des aspects concrets (processus, schéma). Mais sa définition purement mathématique, sans référence directe à des considérations concrètes, va permettre de résoudre des problèmes concrets par projection de l'objet mathématique.

Le langage intérieur et l'activité mathématique

De l'analyse faite à partir du sens des opérations de base, on peut tirer des principes généraux s'appliquant aux autres niveaux de l'apprentissage mathématique.

Le langage intérieur se constitue autour d'un noyau de représentations et d'énoncés rendus familiers et dont le but est de faire le lien entre des problèmes et des «objets mathématiques [7]». Ce langage intérieur donne un sens aux concepts mathématiques et à la résolution des problèmes.

Ce langage se développe par l'utilisation de «représentations symboliques» pouvant servir à la fois à représenter des situations concrètes et à concrétiser des objets mathématiques.

L'activité mathématique se développe en établissant individuellement des liens entre des «représentations mathématiques» différentes, des situations concrètes et la «langue mathématique».

L'apprentissage d'algorithmes est un moyen d'acquisition de concepts mathématiques: l'algorithme intériorisé sera le support de la définition du concept. Dans ce cas, «apprendre» précède «comprendre».

On résout un problème en faisant exister mentalement la structure spatiale et/ou la séquence temporelle des événements que décrit l'énoncé et en situant les éléments inconnus dans chacune de ces structures: ce travail constitue l'évocation du problème. Ensuite, on s'évade de la structure concrète pour aller vers une représentation mathématique ou la langue mathématique. Pour effectuer cette transformation, on peut imaginer des «actions virtuelles» ou tenter de «projeter la langue mathématique» dans la situation évoquée.

7. Les expressions entre guillemets sont définies dans les textes qui précèdent.

Cela précise l'entraînement mental à effectuer pour pénétrer le sens de l'activité mathématique :

1. Évoquer un énoncé du point de vue spatial et/ou séquentiel.

2. Associer des représentations mathématiques aux évocations précédentes. Pour cela, il faut établir des liens entre des représentations différentes. Ce travail de traduction d'une représentation est un geste mental essentiel à la compréhension mathématique.

3. Une langue mathématique autonome est indispensable pour résoudre des problèmes concrets. Cette langue unique se projette dans les formes multiples de la réalité concrète. La projection de la langue mathématique dans la réalité est aussi un geste mental essentiel à la compréhension mathématique.

Cette activité mentale s'exerce dès le début de l'apprentissage mathématique et se développe aussi longtemps que se poursuit cet apprentissage. De ce point de vue, il n'y a pas de rupture selon l'âge ou le niveau.

VIII

L'algèbre

La rencontre avec l'algèbre est souvent une mauvaise rencontre. Soudain le sens échappe, le comportement se fait mécanique. Et pourtant, la présence de l'algèbre n'est pas éphémère. Elle devient même le moyen d'expression favori de l'activité mathématique. Tout comme la rencontre avec la démonstration, il s'agit d'un des moments les plus importants de l'apprentissage mathématique.

L'algèbre est tristement associé aux multiples avatars de la lettre « x ». L'algèbre, ce sont des calculs toujours faux et à jamais mystérieux, les problèmes « résolus » magiquement, les équations aux équilibres instables et les inéquations à l'orientation aussi permanente qu'une girouette.

Nous nous limiterons aux représentations, donc au sens, qu'un élève peut se donner du calcul algébrique, de la notion de variable, de la résolution des problèmes « par l'algèbre », de la résolution des équations et des inéquations. Ce sera l'occasion de préciser le fonctionnement du langage intérieur en mathématique et de caractériser l'évocation particulière au mathématicien.

LE CALCUL ALGÉBRIQUE

Nous appellerons calcul algébrique toutes les transformations conduisant à des identités : a (b + c) = a.b + a.c est une identité car l'égalité est vraie quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres a, b et c. En revanche, l'égalité x + 5 = 3 n'est vraie que pour certaines valeurs données à la variable : c'est une équation.

Que veut dire 3x ? En troisième [1], certains élèves ne savent pas, ne savent plus ou ne savent pas toujours. Ils ne savent pas parce que le sens de ce « x » n'est pas clair. Ils ne savent pas parce que l'écriture 3x n'a jamais été évoquée, c'est-à-dire associée à ce qui est déjà connu.

Cette écriture est souvent évoquée différemment selon les valeurs données à x. Voici comment procédait un élève de troisième, certes en difficulté en mathématiques, mais d'un niveau convenable dans les autres disciplines. Si x est remplacé par 0, 3x devient 30. Si x est remplacé par -2, 3x devient 3 - 2, soit 1. Si x est remplacé par 3, 3x devient 9. S. pouvait énoncer la règle qu'il appliquait : il y a le cas où x est nul, celui où x est négatif et celui où x est positif. S. n'utilise que les nombres entiers. C'est une des multiples règles que S. se donne, règles ne s'appliquant que dans des cas très restreints. Par exemple, il n'a jamais écouté ce qu'il disait quand il prononçait « trois x ». Il comprend bien « 3 pommes », mais « trois x » n'avait pas le même sens parce qu'en mathématiques « ce n'est pas pareil ». Auditif, il n'évoque rien en mathématiques de façon auditive. Les mathématiques ne se parlent pas, ne s'écoutent pas.

Il faut dire que le calcul algébrique repose sur des notations fort ambiguës : il n'y a pas de symboles entre le 3 et le x, pourtant il faut imaginer une multiplication. Quand on écrit 3 - 2x, il faut calculer deux fois x et ensuite enlever ce qu'on vient de trouver à 3. Il suffit de faire un programme

1. Secondaire 4 au Québec.

pour qu'un ordinateur fasse ces calculs à partir d'expressions algébriques écrites de cette façon pour comprendre la quantité d'ambiguïtés qu'il faut lever.

Les élèves qui ont de graves difficultés en calcul algébrique ne savent pas calculer, même avec des nombres entiers ; et ceux qui savent calculer avec des nombres entiers et qui ont des difficultés en algèbre n'ont jamais pensé à faire le lien entre la forme des calculs qu'ils font avec des nombres et le calcul algébrique. Qu'est-ce que veut dire savoir calculer avec des nombres entiers ? C'est savoir faire mentalement des calculs comme $3 \times 4 - 5$ ou $3 \times (-3) + 4$, ou encore $3 \times (3 + 4)$. C'est aussi, une fois le calcul effectué, prendre conscience de la forme du calcul effectué.

Ces lois peuvent s'établir fort naturellement si l'on fait un peu de calcul mental.

Le calcul mental, support au calcul algébrique

Si l'on demande de faire mentalement le calcul 12×23, certains vont essayer d'utiliser des techniques visuelles. Ils vont écrire sur un écran mental l'opération comme ils la posent par écrit et l'effectuer de la même façon. D'autres sont incapables d'un tel effort de visualisation et vont dire que « multiplier par 12, c'est multiplier par 10 et par 2 et faire la somme ». Autrement dit, ils vont se dire $10 \times 23 = 230$, $2 \times 23 = 46$, d'où la réponse 276. Les techniques de calcul mental ne se limitent pas là, et il suffit de demander aux élèves d'expliquer comment ils procèdent pour obtenir des méthodes quelquefois surprenantes, mais souvent intéressantes.

La connaissance des tables est indispensable. Nous avons donné dans la partie traitant de la multiplication quelques méthodes simples pour apprendre les tables.

Qu'ils utilisent ou non une méthode auditive pour faire les calculs, tous comprendront comment on peut calculer à partir d'une décomposition des nombres. Ainsi, pour calculer 12×23, on fait $10 \times 23 + 2 \times 23$.

Donc $12 \times 23 = (10 + 2) \times 23 = 10 \times 23 + 2 \times 23$. Un élève faisant facilement ce genre de transformation ne sera pas très surpris quand on lui parlera de la distributivité de la mutliplication sur l'addition : $(a + b) c = ac + bc$. Il aura dans son langage intérieur ce qui lui permettra d'associer la propriété à des procédures déjà utilisées.

Le calcul mental est beaucoup plus efficace que le calcul écrit pour donner ensuite un sens au calcul algébrique, sans doute parce que les manipulations mentales obligent à la prise de conscience des procédures utilisées et s'appuient sur ce qui est simple et chargé de sens.

L'ordre de priorité des opérations

Comment se souvenir que, pour calculer $5 + 3 \times 4$, il faut d'abord effectuer la multiplication puis l'addition. Il y a la solution de l'apprendre « par cœur », soit auditivement (apprendre la comptine « on fait les multiplications avant les additions ») ou visuellement :

1 – la multiplication $\times$
2 – l'addition +

S'il ne faut pas négliger de tels moyens, qui peuvent quelquefois régler bien des problèmes, ils sont cependant insuffisants pour donner un sens à cette règle.

Un problème, quel problème ?

Il faut d'abord qu'il y ait prise de conscience du problème. On apporte trop souvent des solutions à des problèmes que les élèves ne se sont pas posés. Les deux exercices suivants ont pour but d'insister sur l'importance de la position relative des signes d'opération et des parenthèses.

1. Pour chaque ligne, vous disposez d'un signe + et d'un signe ×. Vous pouvez placer ces signes où se trouvent des pointillés dans l'écriture suivante. Placez ces signes de façon à obtenir le résultat le plus grand possible.

5 ... 7 ... 4
(5 ... 7) ... 4
3 ... 4 ... 12
3 ... (4 ... 12)

2. Même question, mais cette fois vous disposez de deux parenthèses, une ouvrante « (« et une fermante »)».

... 5 ... × ... 3 ... + ... 4 ...
... 5 ... + ... 3 ... × ... 4 ...
... 110 ... + ... 3 ... × ... 2 ...
... 110 ... × ... 3 ... + ... 2 ...

Toujours pour prendre conscience de l'importance de la position relative des signes d'opération, on peut faire des exercices de traduction du français vers l'expression numérique et de l'expression numérique vers le français :

3. Écrivez l'expression algébrique correspondant aux phrases suivantes :

Je multiplie 3 par 5 et j'ajoute 7.
J'ajoute 3 à 5, puis je multiplie par 8.
Je multiplie 5 par 5 et j'ajoute 5.
J'ajoute 3 à 5, puis je multiplie 4 par 8 et je fais la somme.
Je prends 10, ensuite je multiplie 4 par 3 et je fais la somme.

4. Traduction de l'expression algébrique vers le français.

Écrivez les phrases correspondant aux expressions algébriques suivantes :

$(10 + 4) \times 5$
$15 - 2 \times 3$
$(15 - 2) \times 3$
$10 \times 3 + (5 - 4) \times 5$

Les deux exercices précédents ont pour but de faire un lien entre l'expression numérique et le français. Ces exercices posent le problème, donnent une expérience et créent des liens entre des expressions numériques et des phrases françaises compréhensibles. Ces phrases font un lien entre la structure numérique et une séquence temporelle. On peut aussi créer des liens entre l'expression numérique et des représentations géométriques.

LA VARIABLE ET L'INCONNUE

Premier écueil : qu'est-ce que ce x dont on parle tant en mathématiques ? Une *inconnue*. L'inconnue, c'est « ce qu'on cherche », « ce qui manque ». Ce terme est prudemment non défini en mathématiques. Il semble apparaître en même temps que « l'équation », autre terme partout présent mais tout aussi peu clair : l'équation c'est « quand il y a une inconnue à trouver ».

L'inconnue est cousine de la *variable*. Mais la variable n'est pas plus définie que l'inconnue. La pédagogie a introduit « la boîte » pour parler de la variable. Cette boîte contient un nombre, ou peut contenir un nombre, on ne sait. On peut la représenter par ❑. Cette boîte a de grands mérites pédagogiques, mais que se produit-il quand elle est vide ? Est-elle en attente de nombre ? Ou contient-elle zéro ? Ce zéro cause beaucoup de problèmes, même en troisième. Peut-on mettre zéro dans cette boîte ? Mais si l'on place zéro dans la boîte, il y a quelque chose dans la boîte, et zéro, c'est rien. Alors...

J'ai eu ce genre de discussion très souvent. On voit encore une fois que la représentation personnelle et jamais dite fonde le sens de l'écriture mathématique. La variable, vue comme une boîte, va traîner cette boîte et tous les problèmes de sens accompagnant les tentatives de concrétisation.

Au cours de telles discussions, des élèves proposent de remplacer le carré blanc par un carré noir, « comme ça on voit que le carré cache un nombre écrit en dessous ». C'est peut-être mieux, puisqu'une variable numérique peut être remplacée par un nombre. D'autres proposent un point d'interrogation. De tels échanges, dans lesquels on cherche à inventer des représentations, permettent de préciser les sens divers et cachés que l'on donne déjà aux termes mathématiques. Tenter de trouver d'autres représentations, d'en préciser les sens possibles et de mettre en évidence les ambiguïtés va permettre de savoir ce qu'on met sous les symboles que l'on choisit. Une schématisation, même discutable et à condition d'être discutée, peut conduire à des représentations mentales plus précises.

Associer un carré noir plutôt qu'un point d'interrogation peut révéler une interprétation très différente du sens donné à cette équation, ces deux interprétations conduisant à des méthodes distinctes de résolution.

Interprétation visuelle et interprétation verbale d'une équation : deux sens différents

Une *interprétation visuelle* est essentiellement spatiale et le temps n'intervient pas. x « cache » un nombre présent, mais qu'il s'agit de découvrir ; « x » est déjà ce nombre.

Une *interprétation verbale* consiste à considérer x comme le résultat d'opérations à faire. Tant que l'opération n'est pas faite, x n'est rien.

Pour savoir si un élève donne l'une ou l'autre de ces interprétations, on peut lui demander de faire un choix entre les deux représentations de l'équation : $x + 4 = 8$.

1. Première interprétation :

$$(1)\ \blacksquare + 4 = 8$$

Le carré noir cache un nombre et on essaye de le trouver en procédant éventuellement par substitution. Résoudre l'équation, c'est trouver le nombre caché derrière le carré noir.

2. Deuxième interprétation :

$$(2)\ ? + 4 = 8$$

en précisant qu'on a placé un «?» pour indiquer que l'on ne peut pas imaginer un nombre à placer avant d'avoir trouvé l'opération et effectué le calcul correspondant. Derrière le «?», il n'y a rien. Ce n'est que l'indication de l'endroit où il faudra placer plus tard le résultat d'une opération ou d'une suite d'opérations qu'il reste à faire.

Résoudre l'équation dans ce cas, c'est trouver les opérations qui vont permettre de calculer le nombre que l'on écrira à la place du point d'interrogation.

Dans le premier cas, $\blacksquare$ est déjà un nombre alors que «?» n'est rien. Dans le premier cas, il est légitime d'ajouter un nombre au nombre $\blacksquare + 4$, alors qu'il n'est pas légitime de le faire dans le cas de $? + 4$ puisque ce n'est pas encore un nombre. Ce ne sera un nombre que plus tard, quand le calcul aura été effectué.

Dans chacun des deux cas, le sens de ce qui est inconnu est fort différent : un nombre ou les opérations qui vont permettre d'obtenir le nombre. On retrouve l'approche visuelle qui tend à donner un sens immédiatement à une écriture alors que l'approche verbale va se placer dans la durée et rechercher un processus.

Ces deux interprétations correspondent aux deux sens donnés au signe d'égalité : pour les visuels, le signe = signifie facilement que les deux membres de l'égalité représentent le même nombre : $\blacksquare + 4$, c'est la même chose que 8. Par contre pour les verbaux, il n'y a pas de symétrie entre les deux membres du signe d'égalité. Il se lit de gauche à droite, et indique le résultat d'une opération : on a un nombre que l'on cherche, que l'on ajoute à 4, et le résultat donne 8. Cette égalité n'est pas satisfaisante et ils vont tendre à la remplacer spontanément par $8 - 4 = \blacksquare$.

La variable

Au lieu de tenter de définir « la notion de variable », nous allons simplement décrire ce que l'on peut faire avec une variable : une variable numérique est une lettre que l'on peut remplacer par un nombre. On peut imaginer que le nombre est là et qu'il nous faut le découvrir, ou au contraire qu'il n'y a rien et qu'il nous faut trouver les opérations qui vont nous permettre de le calculer.

On ne sait rien de plus sur l'objet « variable », mais on en sait un peu plus sur ce que l'on peut faire avec cet objet. Dès lors, il faut préciser autant que possible les modalités de cette action. En particulier, si l'on peut remplacer cette lettre par un nombre, il faut préciser les nombres pour lesquels cette substitution est possible avant de commencer toute résolution. Il ne s'agit pas seulement d'une nécessité mathématique de nature formelle, mais d'une nécessité pour qui veut donner un sens à ce qu'il fait. Le flou engendré par l'absence de cette précision fait que les élèves donnent des réponses quelquefois difficiles à interpréter : un élève peut affirmer que l'équation $3x + 5 = 20$ peut avoir une solution, mais que l'équation $3x + 5 = 9$ n'en a pas, tout simplement parce qu'il ne cherche que des solutions entières, et, dans ce cadre-là, il a raison.

On ne peut donc parler de variable sans préciser l'ensemble des nombres qui peuvent lui être substitués. En particulier les calculs algébriques, c'est-à-dire les calculs avec des lettres, ne peuvent prendre leur sens qu'à partir des nombres qui sont susceptibles de remplacer ces lettres. Nous avons donc pris l'habitude, chaque fois qu'une variable apparaît, de préciser les nombres qui peuvent lui être substitués. Avant de commencer un calcul algébrique, on demande explicitement aux élèves de se représenter ces nombres. Ensuite seulement on passe au calcul. À notre grande surprise, cette simple habitude a permis à certains élèves de donner tout d'un coup un sens aux calculs qu'ils effectuaient.

La variable associée à une grandeur

Une variable est souvent associée à une grandeur, comme un poids, une longueur, un âge. Bien des élèves ont alors l'impression que la variable ne remplace pas un nombre mais un objet physique. La « hauteur » qui apparaît dans une figure est un segment qui a une position particulière. La « hauteur » qui apparaît dans une formule d'aire représente un nombre. La confusion entre l'objet géométrique et sa mesure est très gênante. Il ne s'agit pas là de purisme, mais d'une imprécision qui entrave la compréhension, et en particulier des élèves les plus faibles. Il semble qu'il faille faire cette clarification le plus tôt possible.

L'acquisition d'une notion nouvelle se fait par extension de ce qu'on sait déjà faire. Il n'y a jamais rupture dans l'apprentissage, mais continuité et élargissement. C'est dans la mesure où un lien se fait entre ce qui est nouveau et ce qui est déjà intériorisé que la nouvelle connaissance prend racine. Et comme Monsieur Jourdain, les élèves résolvent déjà des équations sans le savoir. Si l'on fait remonter ce savoir-faire, les liens avec la suite seront plus faciles et plus naturels et le langage intérieur va jouer son rôle assimilateur.

Avant de faire des mises en équations, les élèves ont déjà utilisé ces « mots qui remplacent des nombres » dans des formules d'aire ou de volume. Ces formules ont été apprises. Comme elles font partie du « langage intérieur », elles peuvent être utilisées pour approfondir le rôle de la variable dans les problèmes et donner un certain sens au calcul algébrique.

Partons de la formule donnant l'aire d'un triangle :

$$\text{Aire} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} \quad \text{ou encore :} \quad A = \frac{b \times h}{2}$$

Les élèves (sixième, cinquième) [2] font des exercices où ils doivent substituer des valeurs numériques à b et à h et faire le calcul. Ils sont beaucoup moins habitués à trouver

2. Secondaire 1 et 2 au Québec.

des figures géométriques associées à ces formules. Les deux activités ne sont pourtant pas du tout de la même nature.

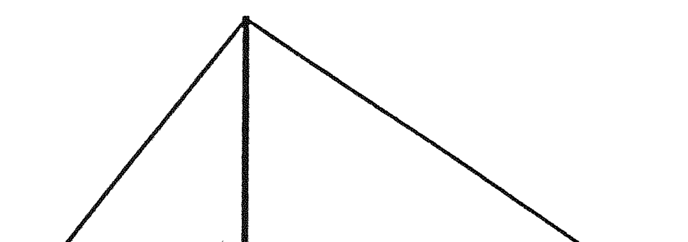
Voici un problème : « Tracez des triangles dont l'aire est de 18 cm^2 et la base 9 cm. »

Dans la formule $A = \frac{b \times h}{2}$, on peut remplacer la base (b) par 9 et l'aire (A) par 18, c'est-à-dire $18 = \frac{9 \times h}{2}$.

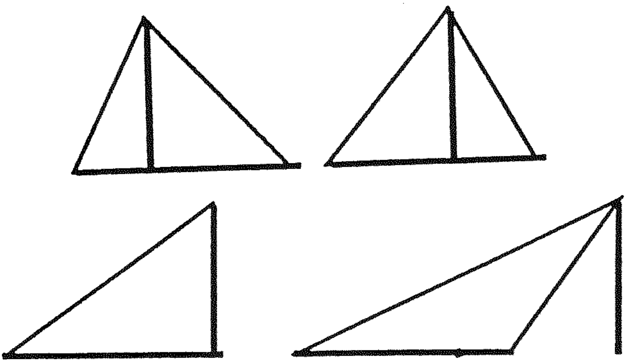
Pour trouver la solution, il n'y a pas de règles à suivre puisque les règles du calcul algébrique ne sont pas encore connues. Il faut se débrouiller, donc faire appel à ce qu'on sait et, mieux encore, tenter de le faire mentalement.

Certains, et surtout des visuels, vont dire qu'ils voient le 4 : « Si à la place du h il y a 8, ça marche. » D'autres vont raisonner verbalement : pour avoir 18, il faut que 9 x h égale 36, donc il faut que h vale 4. Pour l'instant, les élèves travaillent avec des expressions linéaires et il n'y a au plus qu'une valeur numérique qui vérifie ce genre d'équations. Il suffit donc de la trouver. Quelles que soient les méthodes utilisées, surtout obtenues mentalement, elles ont un sens pour l'élève.

Dessinons maintenant des triangles dont l'aire est de 18 cm^2 et la base de 9 cm. On sait maintenant que la hauteur est de 4 cm.



Chaque élève peut donner une solution différente à ce problème : les triangles ne sont pas les mêmes. Pourtant ils ont tous la même aire.



Le calcul nous donne une seule valeur, mais nous avons une infinité de configurations possibles. Ce que le calcul détermine ce n'est que la longueur de la hauteur et non pas la position de la hauteur elle-même : c'est ce qu'on veut dire en disant trouver la « hauteur ». Le sens de la variable se trouve donc précisé : ce n'est pas un objet géométrique qu'elle représente mais un nombre !

Partir de ce que les élèves savent déjà faire

On peut faire le même genre de travail à partir de chaque formule : on fait d'abord un calcul direct (appliquer la formule $A = \frac{b \times h}{2}$, puis on fait marcher « la machine à l'envers » pour calculer h connaissant A et b) et l'on projette dans des situations géométriques (on dessine certains des cas possibles). On ne fait d'abord qu'appliquer, puis on fait des liens à l'intérieur du langage mathématique et enfin on projette dans des situations concrètes. Ces trois temps correspondent à des compréhensions différentes : d'abord on comprend comment appliquer, puis on comprend comment reformuler et enfin on comprend comment projeter dans une situation concrète.

Modifier la perception pour influencer l'évocation

On peut faire un travail analogue avec le trapèze : la formule de l'aire est plus compliquée, mais aussi plus intéressante : $A = \frac{(B + b) \times h}{2}$. Connaissant la hauteur (h), l'aire (A) et la grande base (B), le calcul de (b) demande une manipulation mentale plus importante. Quand les nombres sont assez petits, la plupart des élèves qui ont appris leurs tables y parviennent assez naturellement parce qu'ils ne s'appuient pas sur des règles arbitraires, mais sur le sens qu'ils ont donné à cette formule. Dès que les nombres deviennent plus grands, les difficultés commencent. Il ne s'agit plus de reconnaître, mais de se donner des moyens généraux de trouver la solution. Supposons que l'aire est de 286 cm², que la hauteur est de 13 cm et la grande base de 27 cm. Il faut trouver la petite base. La méthode visuelle de substitution ou la méthode auditive qui consiste à trouver l'opération qui va permettre de faire le calcul peuvent être difficiles en raison de l'apparente complexité de l'expression :

$$286 = \frac{(27 + b) \times 13}{2}$$

En revanche, il suffit de cacher (27 + b) × 13 pour que la situation s'éclaire :

$$286 = \frac{\blacksquare}{2}$$

Qu'est-ce qu'il faut mettre sous le rectangle noir ? Le double de 286, soit 572. Ce qui est caché vaut donc 572.

Donc (27 + b) × 13 = 572.

Continuons à cacher ce que l'on cherche

$$\blacksquare \quad 13 = 572$$

Il faut diviser 572 par 13, ce qui donne 44.
On arrive à : 27 + b = 44.
Certains vont préférer résoudre $27 + \blacksquare = 44$
que l'équation écrite sous sa forme plus classique.

En procédant de cette façon, l'enseignant ne fait que modifier l'apparence de l'équation à résoudre sans donner une méthode de résolution. En modifiant l'apparence de l'équation, on ne fait que contraindre à une évocation nouvelle. L'élève crée automatiquement un lien entre l'objet nouveau qu'on lui présente et ce qu'il sait déjà faire.

On va poursuivre avec d'autres formules et on pourra demander aux élèves de faire eux-mêmes le travail qui consiste à cacher ce qui est accessoire pour mettre en évidence le calcul simple qu'il faut d'abord faire. Évoquer une expression algébrique pour faire un calcul consiste à dégager des structures englobant d'autres structures. Cacher ce qui est accessoire revient à éduquer ce regard particulier. Comme on peut le constater, il s'agit bien d'une évocation, c'est-à-dire d'une transformation mentale de ce qui est perçu pour réaliser un projet. C'est à ce niveau qu'il semble le plus efficace d'agir.

Des exercices de ce genre, qui ne demandent que la connaissance des formules d'aire, conduisent à faire mentalement et naturellement des manipulations qui donneront leur sens aux manipulations algébriques qui viendront plus tard. Voici quelques suggestions d'exercices qui vont dans le même sens :

– Trouver des formules pour des volumes plus compliqués et faire des opérations analogues.

– S'assurer de la connaissance des tables et demander de résoudre mentalement les exercices suivants :

- La base d'un rectangle est le double de sa hauteur. Son périmètre est de 30 cm. Calculez la hauteur et la largeur. Dessinez le rectangle et vérifiez.
- On connaît l'aire d'un triangle. On double sa base. On double sa hauteur. Par quel nombre doit-on multiplier son aire ?

- On connaît l'aire d'un triangle. On multiplie sa hauteur par 2. Comment modifier sa base pour conserver la même aire ? Dessiner un exemple.

Ces exercices, qui partent de propriétés géométriques, visent, rappelons-le, à générer un langage intérieur qui ensuite assimilera les règles du calcul algébrique. Leur efficacité est d'autant plus grande qu'ils sont faits mentalement.

Des jeunes gens qui n'avaient plus fait de mathématiques depuis plusieurs années et qui n'avaient alors qu'un niveau de fin de primaire ont réussi à effectuer les activités précédentes après un entraînement assez sommaire au calcul mental : apprentissage des tables, calculs mentaux simples puis détermination des formules d'aire. Le principe est de s'assurer qu'une nouvelle notion n'est introduite que si l'élève a déjà intériorisé les moyens de l'interpréter.

Les opérations effectuées mentalement s'appuient sur ce qui a déjà un sens

Nous avons remarqué que des élèves peuvent avoir un comportement mathématique paraissant absurde avec un crayon et du papier et retrouver un comportement sensé quand on leur demande de faire mentalement la même chose, et cela quel que soit leur niveau. Une équation du type $ax + b = c$ peut être facilement résolue mentalement, alors que sa résolution par écrit va échouer parce qu'elle va se résumer en une suite d'applications mécaniques de règles non maîtrisées. On retrouve le même phénomène avec des élèves de terminale qui appliquent de façon absurde, par écrit, des règles de dérivation alors que, mentalement, ils effectuent correctement le calcul. Quand on doit travailler mentalement, on va au plus simple et au plus signifiant.

LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES «PAR L'ALGÈBRE»

Il s'agit de traduire algébriquement une situation géométrique ou un problème exprimé en langue naturelle, puis de faire fonctionner automatiquement la machine algébrique pour trouver la solution. Il y a donc deux temps : la mise en équation et la résolution de ces équations.

La mise en équation exige une familiarisation préalable avec la langue algébrique

La mise en équation des problèmes est souvent difficile. En terme d'évocation, il s'agit d'utiliser un langage intérieur algébrique pour traduire un problème exprimé dans la langue quotidienne. Selon la définition que nous avons donnée de la langue intérieure, celle-ci doit être familière et son sens évident. Or, la résolution algébrique des problèmes se fait à un moment où la langue algébrique est totalement étrangère à l'élève. On espère même donner un sens à cette langue par la mise en équation des problèmes. On le voit, on se place dès le départ dans une situation pédagogique très difficile. Il est donc nécessaire de se familiariser avec la langue algébrique avant d'aborder la mise en équation.

Les exercices que nous avons présentés dans les pages précédentes ont pour but de donner un sens à l'écriture algébrique : le lien entre calcul mental et identité algébrique va fonder le sens de certaines lois : distributivité, commutativité, associativité, produit de binômes. L'ordre de priorité des opérations peut être associé à des projections géométriques. Les formules donnant des aires, des volumes ont déjà une forme algébrique qu'il est naturel de transformer et de projeter ensuite dans des situations géométriques. Nous avons vu que ces projections précisent le sens des formules algébriques tout en mettant en évidence la signification de la variable : il s'agit d'un nombre et non pas d'un objet géométrique.

La langue algébrique est une langue étrangère qui peut servir à exprimer des réalités plus ou moins concrètes. Si l'on fait des mises en équations trop tôt, on place les élèves dans la situation d'utiliser cette langue comme moyen d'expression avant de la connaître. Imaginons que l'on demande à ce même élève de s'exprimer en anglais sans jamais en avoir entendu un mot : on considérerait la situation absurde. L'apprentissage des langues passe d'abord par la version : on traduit dans la langue qu'on connaît bien la langue que l'on ne connaît pas encore. Alors l'apprentissage peut même être spontané ; les enfants peuvent apprendre les rudiments d'une langue étrangère en écoutant la télévision. L'apprentissage n'est possible que si l'évocation est possible, donc s'il y a présence d'un langage intérieur capable d'assimiler ce qui est inconnu. Il est donc naturel de traduire d'abord une langue algébrique nouvelle dans des situations familières, et non de faire le contraire, ce que l'on fait souvent lors de la « mise en équation ».

La construction de représentations géométriques associées à des formules procède déjà de ce principe. On peut aussi donner des équations simples et demander de leur associer des problèmes. L'élève pourra choisir le problème dans une petite liste, puis imaginera lui-même des problèmes correspondant à des équations données. Des problèmes différents vont correspondre à la même équation.

Exemple : Trouvez les problèmes qui peuvent être associés à l'équation suivante :

$4 \times 50 \times x = 3\ 000$

Problèmes :

1. Nous sommes quatre à peindre l'intérieur d'un supermarché. Chacun de nous peint 50 m² par jour. Nous avons 3 000 m² à peindre. Combien de jours devrons-nous travailler ?

2. Voici un champ constitué de quatre parcelles égales

dont l'aire totale est de 3 000 m² (figure 1). Trouvez la largeur de chaque parcelle.

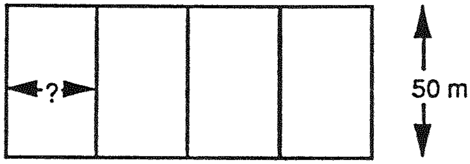


Figure 1

3. Un champ a la forme d'un carré. Il est constitué de quatre parcelles (figure 2). La parcelle grise a la forme d'un carré. Le périmètre du champ est de 3 000 m. Trouvez le côté de la parcelle grise.

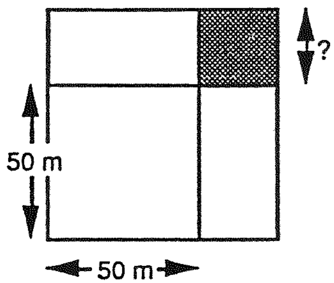


Figure 2

En tentant de faire le lien entre l'équation et les trois problèmes, on donnera un sens différent à la variable x. Les calculs ont aussi un sens différent. Par rapport à l'équation, la troisième situation est absurde. Il faut trouver et dire pourquoi. En multipliant les exercices de ce genre, le sens des équations et l'utilisation des variables vont se préciser.

On leur présentera ensuite des systèmes d'équations qu'ils devront tenter de mettre en relation avec des problèmes. En effet de nombreux problèmes qu'on leur demande de mettre en équation sont en fait des systèmes. On en donne un exemple dans le paragraphe suivant.

Puis les élèves vont commencer à imaginer des problèmes correspondant aux équations proposées. Ensuite seulement on pourra passer à la mise en équation.

Les différences de sens d'une écriture algébrique selon les modalités de l'évocation

La différence entre les deux types de résolution provient du fait que l'auditif se place dans la durée pour résoudre un problème, alors que le visuel se place dans l'espace. Il s'ensuit deux façons très différentes d'aborder la mise en équation.
Exemple : Jacqueline a trois fois l'âge de Marthe. Jacqueline a la moitié de l'âge de Françoise. Si l'on additionne l'âge de Marthe, de Jacqueline et de Françoise, on obtient 110. Quel est l'âge de Jacqueline, Marthe et Françoise ?

Solution verbale : le sens provient des calculs à faire et de leur organisation temporelle

Un élève verbal doit être capable de donner l'énoncé verbalement sans avoir à se reporter au texte écrit avant de commencer la résolution.

La première phase de la résolution consiste à traduire algébriquement le problème. L'élève verbal va chercher plus facilement la transformation ou le calcul qui donne l'âge de l'une en fonction de l'âge d'une autre. Pour obtenir l'âge de Jacqueline (J), on doit multiplier l'âge de Marthe par 3, ou encore Jacqueline est trois fois plus âgée que Marthe. Après avoir énoncé cette relation, on la représente de cette façon :

$3M \longrightarrow J$

La flèche traduit que l'âge de Marthe est connu avant que l'on connaisse l'âge de Jacqueline. L'écriture donne le moyen de faire le calcul : on multiplie par 3 l'âge de Marthe.

On peut ensuite écrire : $3M = J$
ou encore : $J = 3M$

Le signe d'égalité a clairement le même sens que la flèche et signifie « donne » dans le premier cas, alors que dans le deuxième cas il signifie que J est obtenu par le calcul $3 \times M$.

On peut aussi représenter la relation entre l'âge de Jacqueline et de Françoise de cette façon :

$2J \longrightarrow F$

ou encore : $F = 2J$

On peut ensuite demander : Quel est l'âge que l'on connaît d'abord ? Quel est l'âge que l'on peut calculer ensuite ? Enfin l'âge de qui peut-on finalement calculer ? Bien situé dans le temps, l'ordre des calculs se fait simplement : on commence par Marthe, puis on obtient Jacqueline et ensuite on peut calculer l'âge de Françoise. C'est la prise de conscience de l'ordre dans lequel le calcul est possible qui va « donner l'idée » d'exprimer l'âge de Jacqueline et de Françoise en fonction de Marthe.

L'accélération de la séquence permet de déduire la relation nouvelle :

$2\,(3M) \longrightarrow F$

Soit encore :

$6M \longrightarrow F$

ce qui revient à dire que Françoise est 6 fois plus âgée que Marthe, ce qui s'écrit aussi : $6M = F$

Maintenant, l'âge de Marthe plus l'âge de Jacqueline plus l'âge de Françoise donnent 110. On a donc :

$M + J + F = 110$

soit en calculant d'abord l'âge de Jacqueline, puis l'âge de Françoise :

$M + 3M + 6M = 110$

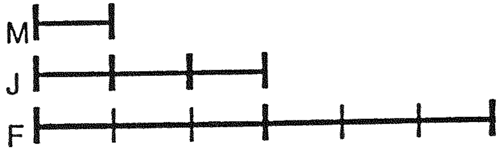
donc $M = 11$.

Tout dans cette solution se place dans la durée : l'interprétation du problème, la mise en équation, la résolution.

Solution visuelle : la solution se dégage du rapprochement de représentations imagées

Voici maintenant une façon visuelle de résoudre le même problème. Un élève visuel va trouver très compliqué toutes les relations temporelles qui vont constituer la trame de la compréhension de son camarade verbal. Il veut voir tout le problème d'un seul coup.

On va représenter l'âge de Marthe par un segment et l'âge de Jacqueline et de Françoise par des segments correspondants :



Au total, il y a 11 segments : il suffit de compter. En divisant 110 par 11, on a l'âge de Marthe. La solution est immédiate. Elle semble magique à l'auditif.

Nous n'avons même pas introduit la fameuse variable « x », mais le premier segment est une variable. Il représente un nombre inconnu. Il n'a de sens que dans la mesure où il permet d'exprimer l'âge de Jacqueline et de Françoise. C'est une concrétisation [3] et non pas une représentation.

Au lieu du petit segment, utilisons « x » : son sens est le même. Il permet d'exprimer visuellement toute la situation :

$$3x = J$$
$$2J = F$$
$$x + J + F = 110$$

Le signe d'égalité exprime que 3x et J ne sont que deux écritures différentes mais équivalentes, tout autant que 2J et F. Le temps n'intervient plus. À la place de J, rien n'empêche d'écrire 3x dans la dernière égalité puisque c'est la même chose. F peut s'écrire aussi 6x. Ce ne sont que des expressions différentes d'une même réalité. On va donc écrire en une seule fois :

$$3x = J$$
$$6x = F$$
$$x + 3x + 6x = 110$$

3. Voir le chapitre 7 pour la définition des termes « concrétisation » et « représentation ».

Le signe d'égalité n'indique plus le résultat d'une opération. Il n'y a plus d'avant ni d'après, mais simplement l'équivalence d'expressions.

La mise en équation n'a pas le même sens pour un verbal ou un visuel. Dans le cas du verbal, les équations expriment des transformations ou des calculs s'effectuant dans un ordre qui leur donne leur sens. C'est en cherchant quel doit être le premier calcul à faire qu'il trouve la stratégie de résolution. Pour un visuel, 3x et 6x expriment des états. Le temps n'intervient pas. Toutes les égalités sont simultanées.

Le moment de la mise en équation vient donc après que l'écriture algébrique a déjà pris son sens. Si on ne dispose pas d'ordinateur, le seul fait de donner des noms significatifs aux variables ne pourra suffire à donner un sens à la langue algébrique. En effet, en plus de l'ambiguïté qui fait qu'un nom ne représente pas un objet concret mais un nombre, c'est toute la structure d'une phrase algébrique qui doit avoir un sens et non pas seulement une variable. Lorsqu'on programme un ordinateur, le problème du sens de la syntaxe est pris en charge par la machine qui en plus effectue les calculs. La situation est donc très différente. Il est sans doute possible de donner un sens à la langue algébrique en programmant à partir d'un langage conçu à cette fin. Sans ordinateur, la projection du langage vers des situations concrètes est une étape nécessaire devant précéder la mise en équation.

LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS

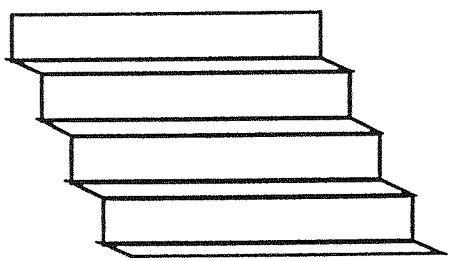
Quand le problème est mis en équation, il faut résoudre ces équations. L'avantage de la méthode algébrique de résolution des problèmes vient de l'automatisation possible de ce moment dans la résolution du problème. Il suffit d'appliquer des règles. Mais un être humain n'est jamais un automate. Même pour agir automatiquement, il doit savoir ce qu'il fait.

Les interprétations de quelques écritures algébriques

L'écriture 3x + 5 a deux sens, l'un plus naturel aux auditifs, l'autre plus naturel aux visuels. Les premiers y voient plutôt une suite d'opérations, les autres voient globalement 3x + 5 comme un nombre.

Nous avons déjà signalé cette différence d'interprétation. Ces deux interprétations existent aussi en mathématiques, le signe = pouvant indiquer le résultat d'une opération ou une relation entre ce qui est à gauche et ce qui est à droite. Dans ce cas, 3 + 2 ne signifie pas un calcul à effectuer, mais est une écriture désignant le même nombre que 4 + 1 ou 5.

Les deux interprétations sont importantes. Il faut pouvoir passer de l'une à l'autre. Comme chaque interprétation est la conséquence d'une évocation différente, le changement d'interprétation est antinaturel. On connaît le dessin de l'escalier qui peut être vu de dessus ou de dessous. Le changement est soudain et demande un effort soutenu.



Voir dans 3x + 5 un nombre quand on y voit une suite d'opérations est un peu de la même nature : ce n'est pas une question de « raison », mais d'évocation. Celui qui spontanément « voit » un nombre dans l'écriture 3 + 2 devra faire un effort pour « voir » dans la même écriture le processus : je prends 3 et je lui ajoute 2, et réciproquement. Il aura toujours tendance à revenir à son interprétation première qui va diriger les solutions qu'il propose. Le changement de point de vue devra être conscient. Il faudra un entraînement particulier pour y parvenir. Les élèves devront alors avoir le projet de voir une suite d'opérations ou un nombre selon la nature du problème qu'ils devront résoudre.

Quelques significations implicites du signe d'égalité et le « projet » qu'elles cachent

Un changement d'écriture algébrique correspond souvent à un changement implicite de point de vue. Le sens de l'écriture est modifié par des transformations graphiques minimes. En fait, chaque forme correspond à un projet différent. Quand on connaît l'importance du projet par rapport au sens, cette question mérite d'être clarifiée.

Des égalités vraies ou fausses

Par exemple, au moment de résoudre une équation, nous devons considérer le signe = comme la notation d'une relation. Les deux écritures mathématiques : $3 + 2 = 5$ et $3 + 4 = 5$ sont des égalités simplement en raison de la présence du signe d'égalité. Une égalité peut se comparer à une affirmation, une relation ou une assertion, dirait-on en mathématiques, affirmation pouvant être vraie ou fausse. Une de ces égalités est donc vraie, l'autre est fausse. La relation est vraie quand les deux écritures de part et d'autre du signe d'égalité désignent le même nombre, comme c'est le cas pour $3 + 2$ et 5. Les élèves auditifs vont résister à cette interprétation. Il faudra la justifier auprès d'eux, en particulier parce que la résolution des équations est beaucoup plus simple si l'on part de cette idée. On sait d'ailleurs que les élèves auditifs ne sont pas particulièrement brillants lorsqu'il s'agit de calculs algébriques.

L'expression algébrique vue comme un nombre

Pour renforcer ce point de vue en particulier pour les élèves auditifs, on prend l'expression $3x + 5$ et on fait le calcul pour un ensemble de valeurs de x, par exemple {-2 ; 0 ; 3 ; 120}. On présente le résultat sous forme de tableau :

x	3x + 5	
- 2	- 1	Quand x vaut - 2, 3x + 5 représente - 1
0	5	Quand x vaut 0, 3x + 5 représente 5
3	14	Quand x vaut 3, 3x + 5 représente 14
120	365	Quand x vaut 120, 3x + 5 représente 365

L'expression 3x + 5 ne pourra être considérée comme un nombre que si on prend l'habitude, dès le début et surtout au début, de toujours l'associer au domaine de la variable. On parlera alors de 3x + 5 avec x ∈ {-2 ; 0 ; 3 ; 120}.

Comme une variable doit être mentalement associée aux nombres qu'on peut lui substituer, une expression algébrique doit aussi être mentalement associée à des valeurs qu'elle peut prendre. Le petit tableau précédent permet de rassembler tous ces aspects. On pourra même demander à certains élèves qui ont besoin d'exemples de le mémoriser pour pouvoir y rattacher les notions de variables et le sens d'une expression numérique. Il faut pourtant s'attendre à ce que l'interprétation de ce tableau reste très différente d'un individu à l'autre : ceux qui au départ considèrent 3x + 5 comme une suite de calculs à effectuer auront toujours tendance à y revenir et diront que 365 est le résultat d'un certain calcul. 3x + 5 ne représentera pas un nombre mais un procédé de calcul.

Les sens implicites du signe d'égalité

Dans l'écriture y = 3x + 5 avec x ∈ {-2 ; 0 ; 3 ; 120}, le signe = a encore un sens différent : ce n'est plus le résultat d'une opération, ce n'est pas une affirmation pouvant être vraie ou fausse, mais beaucoup plus une instruction d'affectation : on part de x, on fait un calcul correspondant à 3x + 5 et la valeur obtenue est attribuée, affectée comme on dit aussi, à y. Autant l'interprétation précédente était difficile pour une évocation verbale, autant l'interprétation de l'écriture y = 3x + 5 comme une affectation lui est naturelle.

Mais le sens du signe = se trouve modifié simplement quand on passe de l'écriture y = 3x + 5 à y – 3x - 5 = 0. Il ne s'agit pas simplement d'un changement d'écriture mais d'un changement de projet d'utilisation. L'écriture y = 3x + 5 nous permet de faire la relation entre la valeur donnée à x et la valeur calculée pour y. L'écriture y - 3x - 5 = 0 est souvent considérée comme une relation pouvant être fausse ou vraie selon les valeurs données à x et à y. Cette écriture sera rapprochée d'inéquations comme y - 3x - 5 > 0. Le passage de y = 3x + 5 s'interprète facilement à partir d'une évocation verbale. L'écriture y - 3x - 5 = 0 s'interprète facilement à partir d'une évocation visuelle. Le changement d'écriture demande, implicitement, un changement d'évocation. Or ce changement reste « non dit ». Le projet derrière les deux écritures est très différent. Derrière l'écriture y = 3x + 5 se trouve le projet de déterminer y quand x est connu. Le projet derrière l'écriture y - 3x - 5 = 0 est de trouver tous les couples de nombres (x ; y) rendant vraie cette égalité.

Voici quelques significations d'expressions algébriques et les projets implicites qu'elles comportent :

L'expression 3x + 5, x ∈ E peut être considérée :

1. Comme une suite d'opérations à effectuer.

Le projet correspondant est de pouvoir calculer la valeur de l'expression donnée pour certaines valeurs de x.

2. Comme un nombre.

On ne prend plus en considération la suite des expressions à effectuer, mais le résultat éventuel de ce calcul. Dans ces conditions, si l'on remplace x par 2, le nombre obtenu peut aussi bien avoir la forme 3 × 2 + 5, ou 6 + 5, ou 11, ou 10 - 1. Dans tous les cas, il s'agit d'un nombre calculé ou non.

L'expression $3x + 5 = 2x - 3$, $x \in E$ peut être considérée :

3. Comme une égalité pouvant être vraie ou fausse entre deux nombres. E est connu.

On peut remplacer x par certaines valeurs prises dans E, calculer les deux nombres de part et d'autre du signe d'égalité et vérifier que l'égalité est vraie ou fausse.

4. Comme une équation $3x + 5 = 2x - 3$, $x \in S$, c'est-à-dire une égalité vraie pour les valeurs de x appartenant à S, le problème implicite étant de trouver les éléments de S.

On imagine que x prend des valeurs contenues dans S. Chaque membre de l'équation est alors un nombre et l'on transforme chaque membre pour déterminer facilement S.

L'écriture $y = 3x + 5$, $x \in E$, $y \in F$ peut être considérée :

5. Comme un moyen d'associer par le calcul une valeur de x à une valeur de y.

$3x + 5$ est un procédé de calcul permettant d'obtenir une valeur, qui, si elle est contenue dans F, est attribuée à y.

6. Comme un moyen d'associer par l'imagination toutes les valeurs de x possibles à toutes les valeurs correspondantes de y.

On imagine, sans faire le calcul, et pour cause, toutes les valeurs possibles de x et les valeurs correspondantes de y. Le calcul est impossible puisqu'il y a en général une infinité de valeurs. Il s'agit d'une fonction. On peut représenter alors l'ensemble de ces couples par une droite du plan.

L'écriture $y - 3x - 5 = 0$, ou l'écriture $y - 3x = 5$, $(x ; y) \in E \times F$.

7. Représente une relation pouvant être vraie ou fausse.

y - 3x - 5, comme y - 3x est un nombre pouvant prendre une valeur arbitraire dépendant du couple (x ; y).

On remplace en même temps x et y par des valeurs prises dans des ensembles E et F. Les couples vérifiant l'égalité sont dits « vérifiant l'équation y - 3x - 5 = 0 ». L'expression y - 3x -5 est un nombre que l'on calcule à partir de valeurs attribuées à x et à y.

Derrière des écritures algébriques très voisines se cachent des significations diverses et des projets variés. Donner son sens à l'écriture algébrique, c'est expliciter ces différences et préciser soigneusement le cadre dans lequel on se place.

Équation, égalité variable et inconnue : préciser les objets sur lesquels on travaille

Bien qu'employé couramment, le mot « équation » n'est pas un terme défini avec précision en mathématiques. Nous parlons même de « l'équation d'un ensemble de points », ce qui constitue encore une autre interprétation.

Faute de définir le terme, on peut parler de la forme de l'équation : c'est une égalité contenant une variable, dans le cas d'une équation à une inconnue. Ce qui nous intéresse, ce sont les valeurs de la variable qui rendent l'égalité vraie. C'est là que réside la différence entre la variable et l'inconnue : la variable peut prendre toutes les valeurs contenues dans un certain ensemble. L'inconnue, elle, ne peut prendre que les valeurs qui vont rendre vraie une égalité donnée.

Certaines égalités sont toujours vraies, quelles que soient les valeurs prises par la variable. C'est le cas, par exemple, de celle-ci : $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$. C'est une identité. Du point de vue de la forme, une identité ressemble furieusement à une équation. Pourtant l'écriture $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ a un sens totalement différent. Cette écriture affirme que les écritures $(x + 1)^2$ et $x^2 + 2x + 1$ représentent toujours le même nombre, que l'on peut toujours substituer une expression à l'autre.

Quand on résout l'équation, on suppose que la variable est devenue inconnue et qu'elle ne peut prendre que les valeurs particulières qui rendent l'égalité vraie. C'est l'hypothèse qui permet par exemple de retrancher le même nombre aux deux membres de l'égalité. Si $3x + 5 = 3$ est vraie (hypothèse), alors je peux retrancher 5 à chaque membre de l'égalité et obtenir encore une égalité vraie. Si $3x + 5 = 3$ n'est pas vraie, alors je peux faire n'importe quoi ! Le sens du travail que l'on fait pendant la résolution de l'équation n'a de sens que si, mentalement, on a conscience que les valeurs prises par la variable x se limitent aux valeurs qui rendent l'égalité vraie.

Or, ces valeurs ne sont pas connues. De nombreux élèves n'admettent pas que l'on fasse « comme si » on les connaissait. Pour eux, nous sommes dans le domaine de l'absurde. Remarquons que nous sommes dans la même situation que lorsque nous mettons en équation un problème concret : nous nommons la solution que nous ne connaissons pas et nous écrivons des relations en parlant de la solution comme si nous la connaissions : soit x l'âge du père, alors l'âge du fils est $x - 20$...

On retrouve ces actions virtuelles, actions fruits de l'imagination, qui donnent un sens à une écriture ou à une représentation mathématique. Ce procédé, si riche en mathématique, doit être explicité.

Quand nous trouvons les solutions d'équations graphiquement, la situation est fort différente : par exemple pour résoudre graphiquement l'équation $3x + 4 = 5x - 3$, on va considérer les deux fonctions $y = 3x + 4$ et $y = 5x - 4$ et donc donner à x tout son sens de variable. Nous trouvons la solution justement parce que nous cessons de considérer x comme une inconnue, mais plutôt comme une variable. Il faut changer de point de vue et beaucoup d'élèves considèrent qu'il y a là un tour de passe-passe, parce que le x « inconnu » de l'équation représente une valeur précise alors que le x des fonctions est une variable pouvant prendre une infinité de valeurs. Pourtant l'écriture est la même dans les deux cas : il s'agit de x.

Le sens des mots « inconnue » et « variable » n'apparaît que si l'on distingue l'ensemble des valeurs que x peut prendre.

Dans l'écriture $y = 3x + 5$, $x \in \mathbb{R}$, x peut prendre toutes les valeurs réelles. Dans l'écriture $3x + 5 = 2x + 4$, tous les calculs que nous allons faire supposent qu'implicitement nous donnons à x une valeur qui va rendre l'égalité vraie. Nous calculons réellement sur $3x + 5 = 2x + 4$, $x \in S$, S étant l'ensemble des valeurs de x telles que l'égalité soit vraie, et nous cherchons à préciser cet ensemble S qui est la véritable inconnue.

Comme on le voit, l'interprétation de l'écriture algébrique est particulièrement fluctuante. Or, c'est de cette interprétation que dépend le sens des calculs algébriques que l'on conduit quand on résout une équation.

LE PROJET DE RÉSOUDRE UNE ÉQUATION

Pour les équations, tout part de la constatation que certaines équations sont plus faciles à résoudre que d'autres. L'équation la plus facile à résoudre est quelque chose du genre $x = 5$; car c'est une équation dont la solution saute aux yeux. Si je remplace x par 5, j'obtiens en effet une égalité vraie. Si toutes les équations pouvaient être aussi simples !

C'est justement ce qui fonde les méthodes de résolutions d'un certain nombre d'équations : transformer l'équation compliquée qu'on vous donne en une équation plus simple, qui aura les mêmes solutions. C'est ce projet qui va organiser et fonder tout ce qu'on va essayer de faire pour résoudre des équations. Ce projet demande de coordonner deux projets plus simples : le premier est de se diriger vers une équation plus simple que l'équation dont on part, le second est de ne pas laisser échapper de solutions en route en encore d'en rajouter. C'est ce projet qui va donner son sens à toute l'activité de l'élève. Il est donc naturel que ce projet devienne, dans ses deux aspects, un projet explicite pris en charge par l'organisateur[4].

Or, ce n'est pas le projet des élèves qui ont des difficultés. Leur premier projet est de faire des calculs, d'appliquer des règles, sans avoir le souci de savoir où ils vont. Ils font des calculs, qui compliquent aussi bien qu'ils simplifient l'équation de départ. Quelquefois, ils tournent en rond simplifiant et compliquant tout à tour.

Il faut donc consacrer un certain temps à clarifier ce projet de façon à ce qu'il puisse devenir leur projet. On peut imaginer quelques activités pour y parvenir.

1. Comparer les solutions de ces deux équations :

$3x + 5 = 20$

$3x = 15$

ou encore :

$3x + 4 = x + 8$

$2x + 4 = 8$

2. Imaginer des équations dont l'écriture sera plus compliquée que celle-ci, mais dont la solution sera la même :

$2x = 7$

3. Comparer les solutions de ces deux équations :

$3x + 7 = 12$

$3x = 12 + 7$

ou encore :

$x^2 = 1$

$x = -1$

Ce ne sont là que quelques exemples qu'on pourrait multiplier. Leur but est de montrer des équations plus ou moins simples mais ayant les mêmes solutions, ou encore des équations n'ayant pas les mêmes solutions malgré d'appa-

---

4. Voir chapitre 5 pour la définition de l'organisateur et de l'exécutant, p. 143.

rentes similitudes. Un bassin d'exemples ayant été ainsi exploré, il va être possible de donner le projet qui va orienter toute l'activité de résolution :

Une équation c'est : Une égalité vraie pour certaines valeurs d'une variable. Exemple :

$3x + 5$ est un nombre, tout comme $2x + 3$.

L'égalité $3x + 5 = 2x + 3$ est vraie pour $x \in S$.

Résoudre une équation c'est : Déterminer S.

Projet pour résoudre une équation :

1 – trouver des équations plus simples que l'équation donnée, par exemple une équation de la forme $x = a$;

2 – ayant les mêmes solutions que l'équation de départ.

Les éléments de S sont alors faciles à déterminer.

Il faut s'assurer que ce projet est évoqué convenablement par les élèves. Pour cela, on pourra encore l'afficher en utilisant un rétroprojecteur et demander aux élèves de le lire sans rien écrire, puis on éteint le rétroprojecteur et on demande aux élèves de l'écrire. Ensuite on leur demande de trouver des exemples et des contre-exemples correspondant à chacune des deux parties du projet. Cela fait, il est possible d'aller plus loin et de chercher maintenant les moyens de « simplifier » les équations, et de vérifier l'équivalence de leurs solutions.

Il est possible de transformer une équation en une autre équation en ajoutant ou en perdant des solutions. C'est ce dont il faut d'abord prendre conscience. C'est seulement ensuite qu'il sera intéressant de chercher des transformations qui conservent les solutions.

Voici quelques exemples. Chaque fois, on précisera la transformation effectuée sur l'équation. x représente un entier relatif.

$x = -1$
$x^2 = (-1)^2$

$x = 3$
$0x = 0x3$

$x + 5 = 2$
$x = 5 + 2$

$3x = 9$
$x = 9 - 3$

Exemple : résoudre l'équation 5x - 5 = 2x + 15 (x représente un nombre réel).

On associe chaque fois un « objectif » et un « moyen ».
Résoudre l'équation, c'est déterminer l'ensemble S de sorte que l'égalité soit vraie.

$$\mathbf{5x - 5 = 2x + 15} \qquad \mathbf{x \in S}$$

1. Objectif : regrouper les inconnues du même côté de l'équation.
Moyen : retrancher le nombre 2x de chaque côté de l'égalité.

$$\begin{array}{lcll} \mathbf{5x - 5} & = & \mathbf{2x + 16} & \mathbf{x \in S} \\ \mathbf{-2x} & & \mathbf{-2x} & \\ \hline \mathbf{5x - 2x - 5} & = & \mathbf{16} & \\ \mathbf{3x \quad - 5} & = & \mathbf{16} & \mathbf{x \in S} \end{array}$$

2. Objectif : isoler la variable.
Moyen : ajouter un même nombre de chaque côté de l'égalité.

$$\begin{array}{lcll} \mathbf{3x - 5} & = & \mathbf{16} & \mathbf{x \in S} \\ \mathbf{+ \ 5} & & \mathbf{+5} & \\ \hline \mathbf{3x + 0} & = & \mathbf{21} & \mathbf{x \in S} \end{array}$$

3. Objectif : Ramener le coefficient de x à 1.
   Moyen : diviser les deux côtés par un même nombre.

$$\mathbf{3\,x = 21} \qquad\qquad \mathbf{x \in S}$$

$$\mathbf{\frac{3\,x}{3} = \frac{21}{3}}$$

$$\mathbf{x = 7} \qquad\qquad \mathbf{x \in S}$$

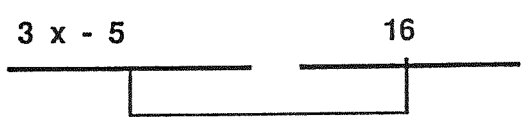
Donc **S** = {7}

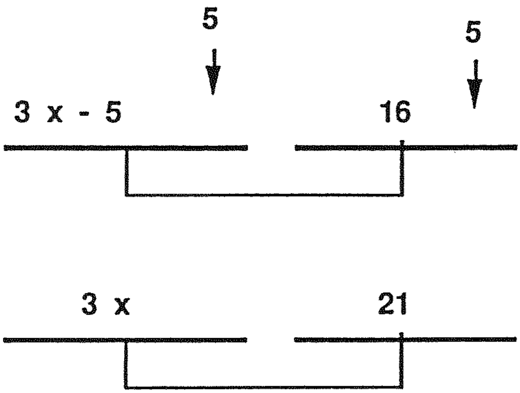
Les élèves doivent donner leur objectif et le moyen de l'atteindre. Ceci a pour but de les placer dans une situation où ils doivent agir en fonction d'un objectif, donc de façon cohérente.

L'IMAGERIE ASSOCIÉE AUX TRANSFORMATIONS D'ÉQUATIONS

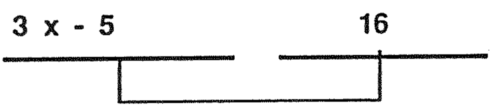
On utilise un certain nombre d'images pour faciliter l'acceptation des règles de transformation des équations. Par exemple, on fait souvent l'analogie entre les transformations faites sur l'équation initiale avec le dépôt ou le retrait de poids sur les plateaux d'une balance Roberval.

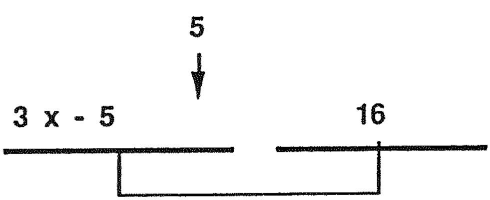
Voici quelques exemples d'utilisation de l'image de cette balance. Après avoir donné les règles de transformation des équations, on peut présenter les schémas suivants en posant les questions :
Observez cette suite de 3 schémas. Que voyez-vous ? Qu'a-t-on voulu représenter ?

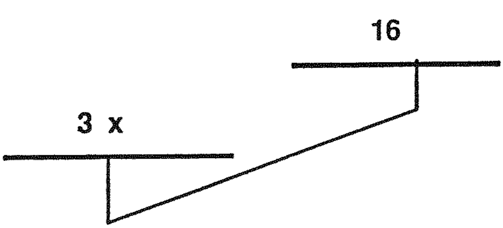




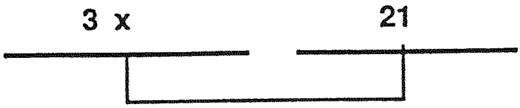
Ces questions peuvent aussi s'appliquer à ces trois schémas :

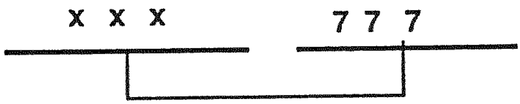


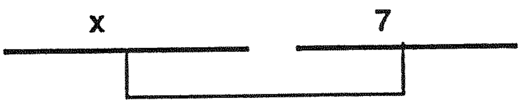




ou encore :







Ces images peuvent être un grand secours pour certains élèves, en particulier des élèves visuels. Les élèves à dominante auditive restent beaucoup plus sceptiques devant ce genre de présentation.

Même pour les élèves visuels qui peuvent profiter de ce genre de représentation, il faut veiller à ce qu'ils donnent à cette balance un sens qui ne les bloque pas. L'ajout d'un nombre négatif est déjà plus difficile à représenter avec une balance, bien que ce soit toujours possible ! Il vient un moment où les représentations très concrètes de ce type deviennent tellement lourdes qu'elles vont à l'encontre de ce qu'on pourrait en attendre.

La balance symbolise l'invariant dans une transformation. Dans chaque plateau, on trouve un nombre : 3x - 5 « pèse » autant que 16 ; cela exprime bien que l'on imagine x ayant pris la valeur qui va produire l'équilibre des plateaux. C'est aussi une façon de représenter que 3x - 5 doit être considéré comme un nombre. D'autre part, la nécessité de conserver l'équilibre est une façon de représenter que les nombres qui étaient égaux avant la transformation le sont encore après.

Si la représentation de la balance permet d'aborder ces points, et d'en parler, son rôle pourra être intéressant. Si les élèves comprennent qu'il ne s'agit que de cela, ce sera parfait. En revanche, si un élève s'en fait le modèle unique sur lequel il appuie sa compréhension parce que « ça marche », ce sera une catastrophe qui l'empêchera de pénétrer dans un univers mathématique. Résoudre une équation est une activité mathématique se situant au niveau d'un langage. On peut reconnaître dans les images de la balance une projection de ce qu'on fait en mathématiques. La situation concrète permet une sorte de concrétisation locale et provisoire de relations et de propriétés qui n'ont toute leur réalité que mentale. Il faut regarder la balance avec un « œil de mathématicien » et non de « spectateur ». Alors, des images comme celles de la balance, comme tout autre analogie, peuvent aider à évoquer ces relations et ces propriétés mathématiques.

Faisons le point

Les règles du calcul algébrique auront un sens s'il existe déjà un langage intérieur établissant un lien entre leur énoncé et des connaissances antérieures. Le calcul numérique, et en particulier le calcul mental, constitue un moyen de construire ce langage intérieur.

La projection des expressions algébriques dans des situations géométriques donne des moyens d'interprétation de certaines règles du calcul.

Une équation est évoquée différemment selon que l'évocation est auditive ou verbale : dans le premier cas, on cherche des opérations permettant un calcul, alors que dans le second on cherche à découvrir un nombre. Ces deux conceptions ont une influence importante sur la compréhension d'une méthode de résolution de l'équation.

La mise en équation d'un problème passe par une bonne connaissance préalable du langage dans lequel s'effectue la traduction du problème : le langage algébrique.

Cette mise en équation s'effectue de façon différente selon que l'on évoque visuellement ou auditivement.

Les manipulations algébriques passent par une évocation particulière qu'il est possible de développer en jouant sur la perception.

Une des difficultés de l'algèbre est le flou des concepts utilisés. Il ne peut y avoir compréhension sans précision des objets évoqués.

Une même expression algébrique peut exprimer des réalités fort différentes et correspondre à des projets d'utilisation très éloignés les uns des autres. Le regard du mathématicien cherche à donner des significations multiples à une écriture la plus simple possible. C'est ce regard qu'il faut éduquer. Les élèves doivent apprendre à lire l'algèbre en précisant les objets et les projets qui peuvent lui être associés. Derrière « l'invention » de l'écriture algébrique, il y a eu la nécessité de rompre avec le réel géométrique pour exprimer des relations logiques qu'il fut ensuite possible de reconnaître dans des réalités variées. Le sens du langage algébrique procède donc non pas d'une continuité, mais d'une rupture initiale avec le monde concret suivi d'un retour vers celui-ci sous forme de projections multiples. Il y a analogie entre les règles du calcul algébrique et le calcul arithmétique. Il y a cohérence entre certaines illustrations géométriques et certaines lois. Mais les lois du calcul algébrique sont posées de façon autonome dans le cadre de la langue mathématique. On obtient alors une langue capable d'exprimer des situations et des objets auxquels il n'était pas possible de songer avant son exis-

tence. Il est nécessaire de travailler à trouver ces situations et ces objets, car c'est dans ces conditions que le sens de cette langue s'enrichit. La compréhension en mathématique passe donc par ce geste mental qui consiste à projeter la langue mathématique dans des situations plus concrètes. C'est ainsi que l'on apprend à lire l'algèbre.

IX

La démonstration

Il n'y a pas de mathématiques sans démonstration. Démontrer, c'est d'abord voir autrement : derrière l'objet, c'est voir [1] la structure et des relations. C'est exprimer ce qui est local et immédiat en fonction de ce qui est général et permanent. C'est convaincre sans séduire ni imposer, mais en faisant partager une construction mentale où l'évidence et la simplicité donnent un sens à une situation complexe.

La démonstration n'a de sens que si l'on sait distinguer le monde sensible d'un univers mental particulier qui sert à l'interpréter. Cet univers mental est l'instrument d'une évocation originale, l'évocation mathématique. L'initiation à la démonstration passe donc par l'éducation de cette évocation.

La démonstration ne demande pas seulement de faire, mais de se regarder faire. Elle exige à la fois imagination et maîtrise totale de sa démarche et de son expression.

1. Le mot « voir » ne présume en rien d'une modalité évocative, pas plus que l'expression « l'œil du mathématicien ».

Démontrer ce n'est donc pas appliquer un formalisme figé, c'est une des expressions les plus achevées de l'activité mathématique. On imagine alors toutes les difficultés de cet enseignement.

REFORMULATION DU PROBLÈME DE L'ENSEIGNEMENT DE LA DÉMONSTRATION EN TERMES DE GESTION MENTALE

En enseignant une démonstration, notre ambition n'est pas seulement d'enseigner une démonstration particulière, mais surtout d'apprendre à faire des démonstrations. C'est dans cette optique que nous tenterons de répondre aux questions suivantes

– Démontrer correspond à un projet : lequel ?

– Comment enseigner ce projet ?

– Quelles sont les caractéristiques de « l'évocation. mathématique » et comment la susciter ?

– Comment poser un problème de démonstration en termes d'évocation particulière de la réalité ?

– Comment avoir l'idée d'une solution ?

– Comment « enseigner » pour permettre à chacun de pratiquer l'évocation mathématique qui lui convient ?

– Quels sont les gestes mentaux qu'un élève doit faire pour mener à bien une démonstration ?

Nous allons d'abord décrire quelques activités dont le but est d'amener l'élève à préciser les caractéristiques propres de l'activité mathématique et à développer « l'évocation du mathématicien ». Ensuite nous présenterons la démonstration d'un théorème vu en quatrième [2] en s'appuyant sur le projet rendu explicite de se placer dans le cadre de l'activité mathématique et d'utiliser « l´évocation

2. Secondaire 4 au Québec.

du mathématicien ». Les notions utilisées tournent autour de la symétrie centrale et mettent en jeu des parallélogrammes.

QU'EST-CE QUE L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE ?

Si les élèves pensent que « faire des maths » c'est seulement calculer et produire des résultats, il est inutile de leur parler de démonstration. Il va d'abord falloir leur enseigner que l'activité mathématique c'est aussi autre chose. Voici quelques activités, et une possible façon de les gérer en classe, dont le but est d'enseigner ce qu'est l'activité mathématique, donc de décrire le « projet de faire des mathématiques ».

Présentation en quatre temps [3]

Quand nous avons un point important à présenter aux élèves, nous le faisons en distinguant quatre temps dans la présentation. Ces temps sont les suivants :

1. On présente aux élèves, dans le silence, de courts textes ou des schémas sur le rétroprojecteur. On leur demande de les regarder avec l'intention de les reproduire ensuite sur leur cahier.

2. On masque le rétroprojecteur après une quinzaine de secondes et on demande à ce moment-là seulement d'écrire ou de dessiner sur le cahier. Ce qui est reproduit sur le cahier n'est pas forcément le décalque de ce qui était sur le rétroprojecteur. Ce peut être une interprétation personnelle de l'élève.

3. On découvre de nouveau le rétroprojecteur pour que

---

3. Déjà présentée plus longuement au chapitre 3.

les élèves puissent comparer le sens du message initial et l'interprétation qu'ils en ont donnée.

4. Ensuite l'enseignant peut poser des questions ou commenter ce qui a été montré.

Cette activité de mémorisation à court terme demande à l'élève de se donner un codage mental personnel de ce qu'on lui présente (1) et de vérifier qu'il est bien conforme à la réalité (3). Ceux qui pratiquent des évocations plus visuelles peuvent profiter du silence et de l'image – temps (1) – pour s'en faire une représentation mentale visuelle. Les autres pourront en faire une traduction verbale qu'ils préciseront au temps (4). Le processus de compréhension pourra partir dans les deux cas d'une évocation de la réalité qui correspond à chaque type d'élève.

Activités d'exploration

L'activité suivante peut être présentée à partir de la sixième [4]. Il s'agit de trouver une méthode pour calculer l'aire d'un parallélogramme. Ce problème a déjà été abordé au primaire, aussi faut-il bien préciser aux élèves le but du travail : il s'agit de comprendre comment un « mathématicien » agit, ce qui est important pour lui, ce qu'il recherche, et ceci dans le but d'avoir l'intention de travailler comme lui pour résoudre certains problèmes.

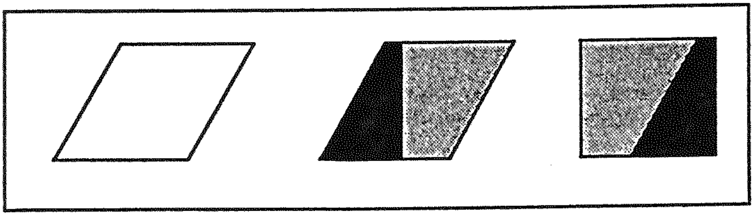
On peut présenter « en quatre temps » le texte suivant : « On sait calculer l'aire d'un rectangle. En utilisant seulement cette connaissance, comment calculer l'aire d'un parallélogramme ? »

Ensuite, par une présentation « en quatre temps », on donne une nouvelle formulation du même problème : « Comment transformer un parallélogramme en un rectangle de même aire ? »

4. Secondaire 1 au Québec.

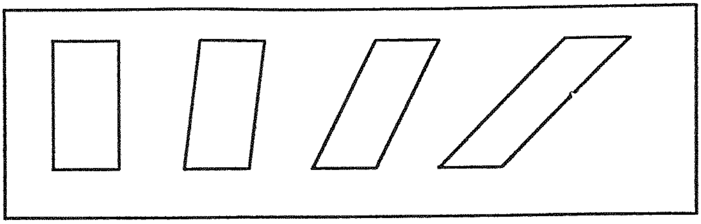
On précise ensuite oralement le but de l'activité que l'on va entreprendre.

Le problème ayant été résolu dans des classes inférieures, on peut se borner à présenter « en quatre temps » l'image suivante :



Le commentaire consiste soit à animer mentalement ces trois images et à imaginer que le parallélogramme est coupé et que les deux morceaux sont permutés, ou encore à exprimer les différences entre les trois figures. On fera préciser comment le partage en deux se fait : il se fait perpendiculairement à la base. On a donc, semble-t-il, un bon moyen de transformer un parallélogramme en rectangle.

Demandons maintenant de combien de façons on peut faire subir la transformation précédente à chacun des parallélogrammes suivants :



On demande aux élèves de faire la transformation mentalement et de n'avoir recours au papier et au crayon que pour vérifier et cela dans le but de manipuler mentalement des transformations visuelles.

– Le premier parallélogramme est aussi un rectangle. Il y a une infinité de façons de faire une transformation au demeurant inutile pour faire un calcul d'aire.

– Il y a aussi une infinité de façons de couper le second.

– Il n'y a qu'un façon de couper le troisième.

– On ne peut faire subir au dernier la même transformation.

On verra que même en sixième ou en cinquième un certain nombre d'élèves s'arrangeront pour couper le dernier parallélogramme en « oubliant » la perpendicularité à la base.

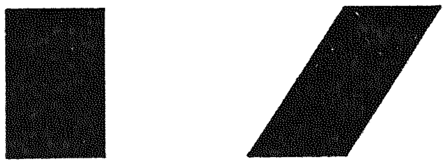
La recherche du procédé le plus général possible

Le procédé que nous avions trouvé n'est donc pas général. Bien sûr, on pourrait retourner le parallélogramme et se débrouiller, mais en tant que « mathématiciens » nous préférerons trouver un procédé général, donc plus simple, qui nous permettrait dans tous les cas de transformer un parallélogramme en un rectangle d'aire équivalente.

Nous avons affaire à une très grande difficulté chaque fois que l'on résout un problème : comment se dégager de la solution que nous avions envisagée pour en trouver une nouvelle, à partir de considérations sans doute complètement différentes. Il nous faut « regarder » le problème d'une autre façon.

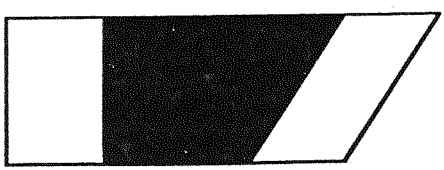
L'évocation ou l'œil de l'artiste

Repartons du point de départ : un parallélogramme et le rectangle équivalent dans un cas où nous savons le construire. Plaçons-les côte à côte. Le rectangle a été obtenu à partir du parallélogramme par découpage. Les bases et les hauteurs des deux figures sont donc égales.



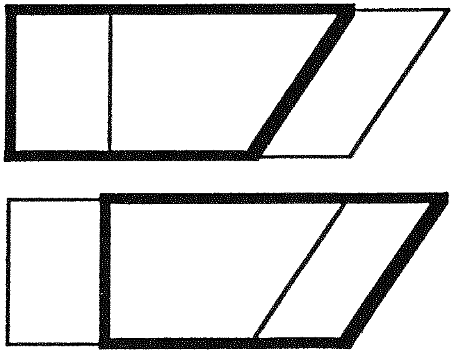
Le spectateur ordinaire voit deux figures. Il leur donnera des noms : un rectangle, un parallélogramme. Il en restera là. C'est là que peut entrer en jeu « l'œil de l'artiste ».

L'intuition, la « créativité » dans la démarche mathématique est souvent de nature visuelle. Pour trouver quelque chose de nouveau, il faut « voir » d'une autre façon. Cette vision nouvelle n'est pas dans les objets eux-mêmes, mais dans l'évocation que l'on fait de ces objets. L'évocation d'un artiste a ses caractéristiques propres : par exemple pour reproduire l'image précédente non seulement il faut regarder les formes noires, mais aussi les espaces « négatifs » entre ces formes. Pour faire un dessin exact, il faut voir le trapèze entre les deux formes noires. C'est lui qui nous permet de placer les deux formes l'une par rapport à l'autre.

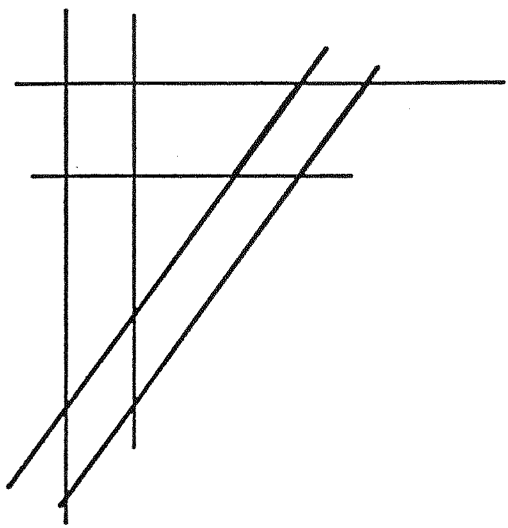


Cette évocation se fait en regardant le dessin globalement et en se laissant aller à voir des formes autres que celles qui sont nommées. Ce « regard » se fait souvent sans parler, en se laissant pénétrer par les formes et les rapports des lignes entre elles.

On peut alors voir d'autres trapèzes dans cette figure :



On peut aussi « laisser les lignes se prolonger ». Apparaissent alors 3 couples de droites parallèles.



Les formes initiales se sont dissoutes. Les lignes qui ne faisaient que souligner les contours deviennent les éléments principaux du dessin.

Cette évocation de la réalité est bien la même que celle d'un dessinateur qui, pour dessiner un œil, cesse de voir l'œil pour ne voir que l'entrecroisement des lignes qui le composent, ou encore va dessiner les espaces négatifs autant que les formes elles-mêmes. Pour provoquer cette évocation de l'artiste dessinateur, on peut retourner un dessin que l'on veut reproduire, le dessin n'est plus qu'un réseau de lignes et les formes identifiables disparaissent. Le dessin effectué ainsi à l'envers est d'une qualité bien supérieure au dessin fait à partir du modèle à l'endroit[5]. Retourner le dessin à reproduire force à évoquer non plus en reconnaissant les objets, comme un spectateur, mais comme le fait un dessinateur.

Peut-être certaines de ces formes construites à partir du dessin initial ne nous aideront pas. Elles constituent en tout cas un nouveau matériel, plus riche que le dessin initial.

Dans une classe, on peut guider une telle recherche en fixant le but : on recherche des formes nouvelles à partir de la représentation initiale. Ces formes nouvelles nous aideront sans doute à faire des liens. On donne quelques moyens d'y parvenir :

– On place le dessin initial devant soi. On tente de s'en imprégner globalement et de laisser les formes apparaître sans se parler.

– Si cela paraît impossible ou très difficile, ajouter des lignes au dessin initial puis le regarder globalement, ajouter d'autres lignes et le regarder à nouveau. Dès que le dessin est trop chargé, refaire le dessin initial et recommencer.

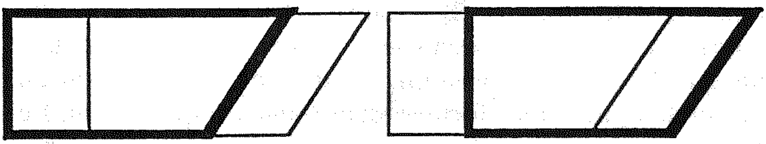
On peut résumer à la fois le but poursuivi et les moyens utilisés en disant que l'on observe la figure avec « l'œil de l'artiste ». On fait ensuite le bilan des formes trouvées.

L'enseignant sait où il veut mener sa classe. Il a besoin des trapèzes pour mettre en évidence une relation entre le parallélogramme et le rectangle. Il va donc demander si, parmi tous les trapèzes apparus, certains semblent égaux.

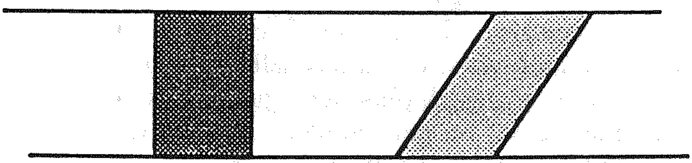
---

5. Voir *Dessiner avec le cerveau droit* et *Vision-dessin-créativité* par Betty Edwards, Pierre Mardaga, éditeur.

On en vient à sélectionner ces deux figures et simplement indiquer qu'elles vont nous être utiles :

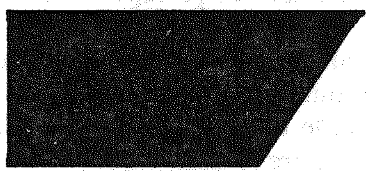


Ensuite sur un rétroprojecteur, on place la figure ci-dessous :

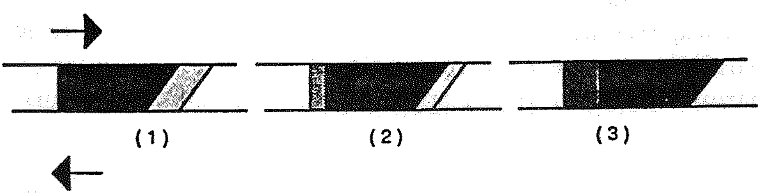


(Le rectangle et le parallélogramme ont même base.)

Sur une autre feuille transparente, on a dessiné le trapèze ci-dessus en noir.



On fait glisser cette deuxième feuille sur la première dans un mouvement de va-et-vient de la façon suivante :



Pendant ce glissement sans rotation, le trapèze noir découvre alternativement le rectangle et le parallélogramme. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que les bases du parallélogramme et du rectangle soient de même longueur.

Certains vont bien sentir que l'on établit ainsi une relation entre le rectangle et le parallélogramme. Elle demeure cependant incertaine pour la plupart des élèves. On leur demande de tenter de la formuler. Bien peu vont pouvoir le faire.

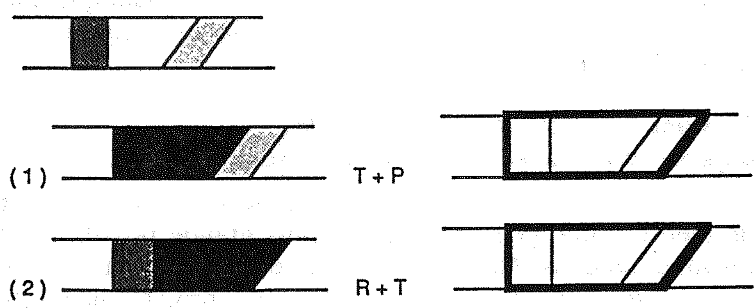
On donne des noms aux aires respectives des rectangle, parallélogramme et trapèze, soit R, P, et T.

L'aire perçue sur le dessin (1) est T + P

L'aire perçue sur le dessin (3) est R + T

Dans les deux cas, l'aire T + P, comme l'aire R + T, est égale à l'aire de la figure formée par la réunion du rectangle, du parallélogramme et du trapèze les reliant.

On peut présenter le schéma suivant en « quatre temps » pour amener les élèves à prendre conscience de cette relation :



Ceci fait, on peut écrire : T+ P = R + T

Ou encore : T+ P = T + R

Ce qui entraîne : P = R

Cette représentation symbolique de la situation (1) et (2) et le calcul qui suit permettent de faire le lien entre le déplacement du trapèze et l'égalité des aires du rectangle et du parallélogramme. La traduction symbolique ne garde que l'essentiel et permet de mettre en évidence l'équivalence des aires. Nous sommes passés de l'œil du spectateur, qui voit des objets et des actions, à une autre évocation de la même réalité, une évocation qui cherche à rendre explicites des relations que le spectateur n'éprouve pas le besoin de clarifier.

Pour forcer le passage de l'œil du spectateur à cet œil naissant du mathématicien, on peut poser des questions du genre :

– Pourquoi le mouvement du trapèze dégage-t-il tout le rectangle quand il cache tout le parallélogramme et inversement ?

– Comment décrire le parallélogramme en fonction des éléments du rectangle ?

– Que nous apporte le calcul par rapport à la simple observation du mouvement ?

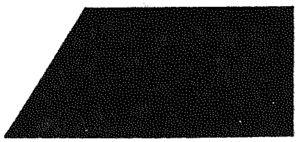
Nous venons de trouver un autre moyen d'associer l'aire du rectangle et celle du parallélogramme sans avoir recours au découpage : ce moyen est-il plus général ? Quel que soit le parallélogramme, on peut maintenant lui associer un rectangle d'aire égale.

Vers une généralisation plus grande :
à quoi notre nouvel outil pourrait-il servir ?

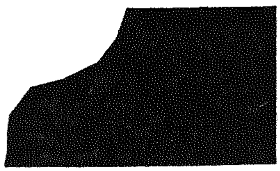
Une des caractéristiques de l'activité mathématique est de tendre à une généralisation la plus grande possible des résultats obtenus. Notre but comme enseignant est que les élèves intègrent cette intention dans leur « projet » quand ils font des mathématiques. C'est cette quête de généralisation qui nous a conduit à rechercher un autre moyen que le découpage pour transformer le parallélogramme en rectangle. On peut maintenant se demander si le procédé que l'on vient de trouver ne s'appliquerait pas à une classe plus grande de figures que les parallélogrammes.

Le procédé que nous venons de trouver consiste à cacher le parallélogramme pour dégager le rectangle et inversement. Peut-on modifier la forme de notre « cache » et transformer d'autres figures que le parallélogramme en rectangle ?

Au lieu de ce « cache »...



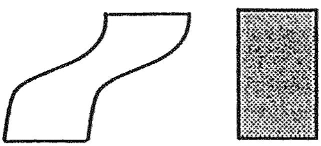
...on peut imaginer un cache ayant cette forme :

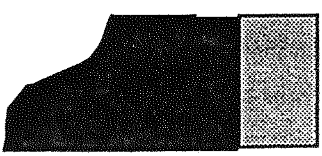


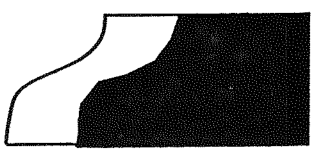
Quelles sont maintenant les figures transformables en rectangles ?

On peut poser la question aux élèves et leur demander de décrire cette classe de figures.

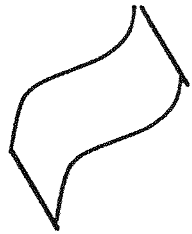
À partir de ce nouveau cache, on peut faire l'association entre ces deux figures :







Et maintenant, quel cache faudrait-il construire pour trouver le rectangle équivalant à cette figure ?



Comment décrire les figures dont l'aire peut se ramener à celle d'un rectangle par le procédé précédent ?

Là encore, à partir de l'œil du spectateur, le mathématicien va tenter de voir des relations ou des transformations virtuelles qu'il pourra énoncer. Pour cela, il lui faudra généraliser la notion de parallélisme des droites à des courbes non rectilignes, définir la hauteur de cette classe de figures « bizarres » pour le spectateur.

Les moyens pour arriver à exprimer ces relations ou ces définitions peuvent être différents d'un élève à l'autre : certains exprimeront le parallélisme à partir de la transformation qui a permis de générer les deux côtés non rectilignes de la figure. D'autres seront gênés par le mouvement et voudront faire une description de la figure telle qu'elle est sans référence au mouvement. Certains auront besoin de garder la figure devant eux et de la raconter. D'autres au contraire devront enlever la figure de leur vue et en décrire l'image qu'ils auront intériorisée. Toutes ces différences dans la manière de trouver des énoncés à propos d'une figure donnée dépendent largement de la nature des évocations faites par les élèves. Ce travail est le premier pas vers la formation de l'œil du mathématicien.

DE L'ŒIL DU SPECTATEUR VERS L'ŒIL DU MATHÉMATICIEN

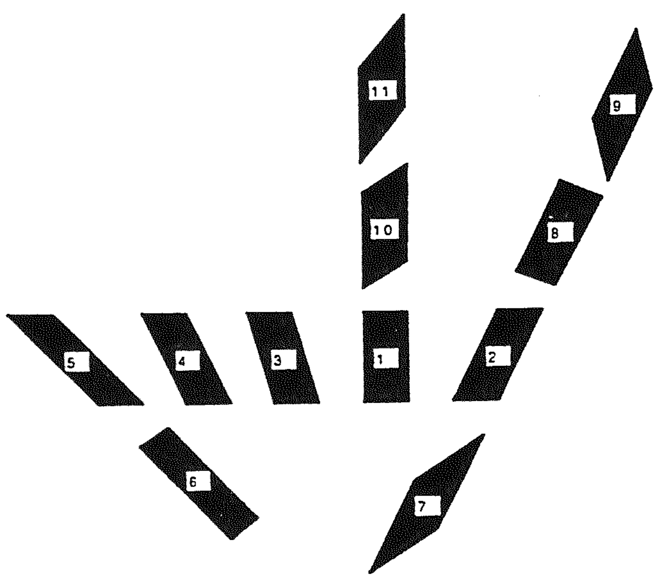
L'œil du spectateur se borne à voir au premier degré : si le dessin représente un triangle, il verra un triangle. C'est une évocation qui identifie ce qui est effectivement représenté. Cette identification va jusqu'à pouvoir donner un nom aux diverses formes représentées.

Nous avons déjà parlé de l'œil de l'artiste, plus précisément du dessinateur, qui au-delà des objets ou des formes se donne une vision globale et muette de l'ensemble qu'il veut représenter, « voit » les espaces négatifs, les relations spatiales entre les courbes plus que les objets eux-mêmes. C'est une évocation particulière de la réalité que l'on utilise quelquefois en mathématiques pour découvrir des chemins nouveaux vers la solution.

Il y a aussi une évocation particulière au mathématicien que nous allons préciser progressivement avec les élèves. Avant de tenter de la définir, voici quelques activités permettant de la développer.

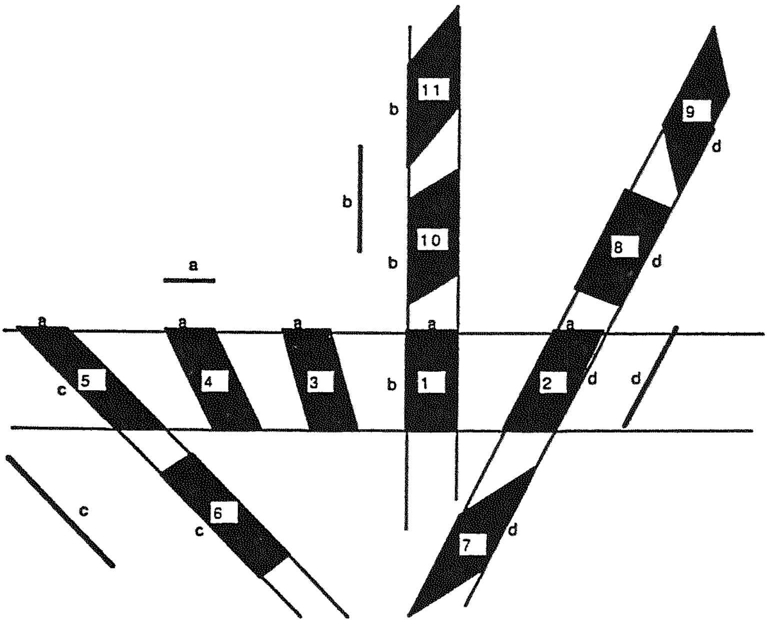
Développer l'œil du mathématicien

Voici un ensemble de parallélogrammes : c'est ce que peut « voir » l'œil du spectateur. Ces parallélogrammes sont présentés sur rétroprojecteur.



Certains de ces parallélogrammes ont-ils même aire ? Le regard du simple spectateur ne peut répondre à cette question. Certains regards, déjà un peu mathématiciens, feront des liens éventuels entre certains de ces parallélogrammes. Ce ne pourront être qu'hypothèses, le dessin ne donnant pas assez d'informations.

Ajoutons par-dessus le dessin précédent un autre schéma. Nous allons obtenir alors :

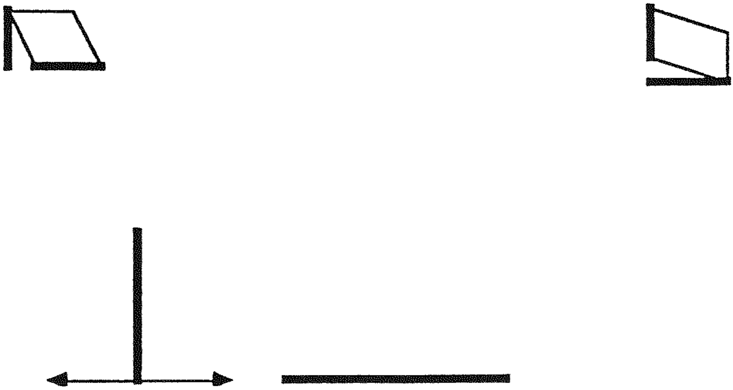


Cette grille nous donne un ensemble d'informations. Les élèves peuvent regarder dans le silence ce schéma en tentant d'interpréter l'information s'y trouvant. Ensuite on peut la commenter. On retire la deuxième feuille transparente et on regarde de nouveau la première feuille. On tente de regrouper les parallélogrammes d'aire égale à la lumière des informations reçues sur le schéma 2. On replace le transparent 2 simplement pour vérifier une information particulière.

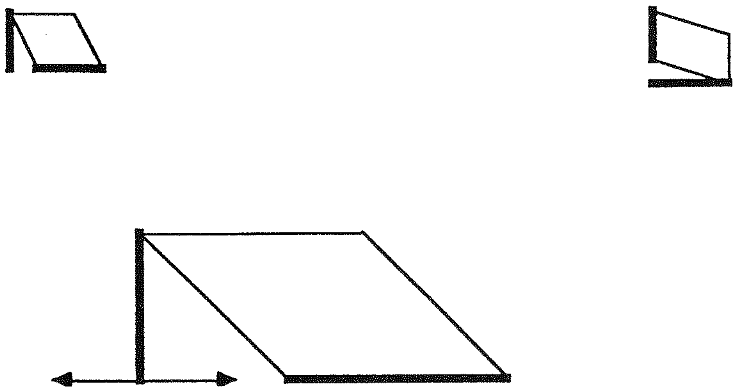
Peu à peu, à l'œil du spectateur qui ne voit pas l'équivalence entre l'aire 5 et l'aire 7, va se substituer l'œil du mathématicien qui voit à travers les relations énoncées sur la feuille 2 : L'aire 5 égale l'aire 1 qui égale l'aire 2. L'aire 2 égale l'aire 8 qui égale l'aire 7. Les élèves qui font cet exercice vous disent tout d'un coup : c'est évident. Ils « voient », ou plutôt ils évoquent ce qui reste invisible à l'œil du spectateur. Il s'agit bien d'une évocation, d'un retour sur la réalité pour en extraire le sens, retour sur une réalité constituée non seulement de l'apparence des choses, mais aussi de relations et de transformations explicitées.

Voici une autre activité dont le but est de développer « l'œil du mathématicien ». Sur une feuille transparente pour rétroprojecteur, on dessine les figures suivantes :

À cette feuille, on superpose une autre feuille transparente sur laquelle ne se trouve qu'un segment perpendiculaire au précédent. On fait glisser cette feuille sur la première. Les flèches indiquent la direction du glissement.



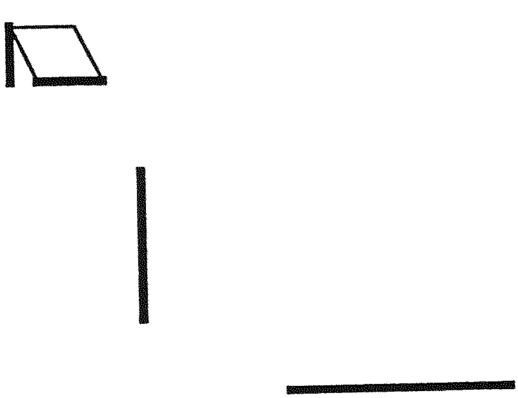
On fait glisser la feuille horizontalement en demandant aux élèves de « voir » le parallélogramme construit selon le procédé indiqué en haut à gauche de la première feuille. Pour ceux qui auraient du mal à « voir » ce parallélogramme, montrons-le une fois :



Il ne faut pas le montrer plus d'une fois : il faut provoquer une construction mentale qui tienne compte non seulement de ce que le spectateur voit, mais aussi d'une relation donnée par l'exemple se trouvant dans le coin gauche de la feuille. Cette construction mentale associe une image vue en tant que spectateur (les deux segments) et une relation. La combinaison de ces deux éléments provoque l'élaboration d'un « objet mental », le parallélogramme.

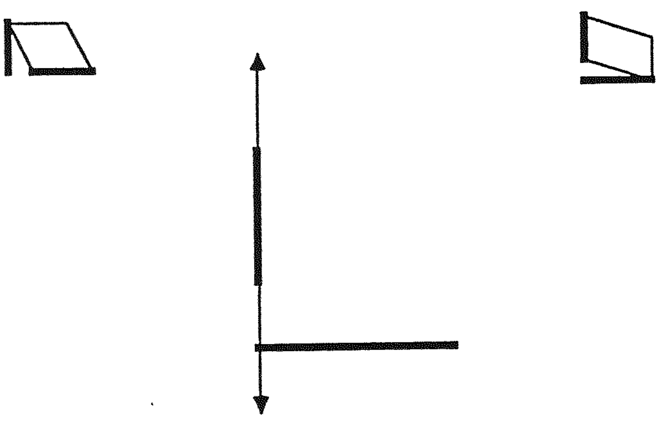
Ce parallélogramme imaginé se déforme. Comment son aire varie-t-elle ?

Faisons « monter » la feuille 2. Qu'arrive-t-il ?



Comment doit donc se déplacer le segment vertical ?

Mais est-ce vrai que l'extrémité inférieure du segment vertical ne doive pas quitter la droite contenant le premier segment ? Que se passe-t-il ici ?



On peut imaginer un parallélogramme construit selon les modalités représentées en haut à droite, cette fois. On peut « voir » ce parallélogramme. Comment se compare son aire à l'aire de la première famille de parallélogrammes ? Et cette fois, comment doit se déplacer ce segment ? Ne peut-il être contenu que dans la droite verticale passant par l'extrémité gauche du segment horizontal ? Qu'en est-il de la droite parallèle passant par l'extrémité droite ? On continue à faire bouger le segment 2, assez lentement pour que le plus d'élèves possible puissent « voir » le parallélogramme se construire mentalement.

Certains seront obligés d'en suivre le contour avec leur doigt pour en susciter l'image mentale, d'autres devront se reporter aux dessins en haut à gauche ou en haut à droite, d'autres devront se dire comment construire le parallélogramme. On demande aux élèves de raconter comment ils font pour faire apparaître ce parallélogramme virtuel. On recommence ensuite jusqu'à ce que le plus grand nombre d'élèves puissent soit voir directement le parallélogramme construit à partir des deux segments, soit, faute d'image, décrire comment ce parallélogramme serait construit.

C'est « l'œil du mathématicien » qui construit ce parallélogramme. Il le construit en regardant avec l'œil du spectateur, mais en prolongeant immédiatement ce regard grâce à la mise en œuvre de relations qui complètent ce qui est perçu pour former une image évoquée.

L'œil du mathématicien et l'œil du spectateur

Les élèves ont déjà travaillé sur les propriétés du parallélogramme. Nous pouvons profiter de ce qu'ils savent pour achever la distinction entre œil du mathématicien et œil du spectateur. Les activités précédentes ont permis de commencer cette distinction avec les élèves. On peut poursuivre cette distinction avec les activités suivantes.

Voici un certain nombre de figures. Ces figures comportent un certain langage visuel. Les tirets mettent en évidence des segments égaux. Quels sont les parallélogrammes vus par l'œil du spectateur ? Quels sont les parallélogrammes vus par l'œil du mathématicien ?

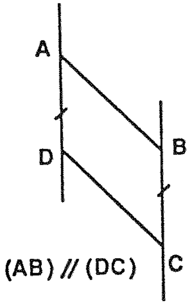


Fig. 1

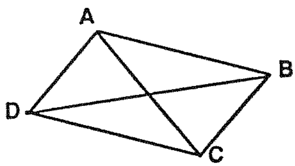


Fig. 2

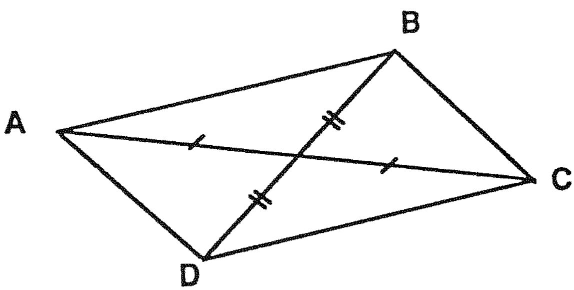


Fig. 3

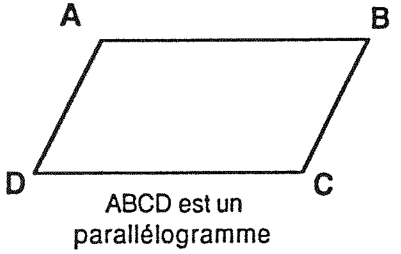


Fig. 4

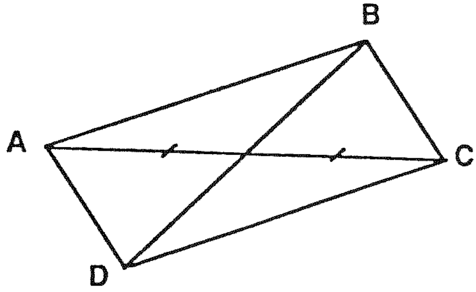


Fig. 5

L'œil du spectateur va voir un parallélogramme dans chacune des figures précédentes. Cependant l'œil du mathématicien ne verra pas de parallélogramme dans le cas de la figure 2 : le dessin ressemble bien à un parallélogramme, mais rien ne met en évidence une relation permettant d'affirmer qu'il s'agit d'un parallélogramme. C'est le cas aussi de la figure 5. La diagonale AC est bien partagée en deux parties égales par la diagonale BD, mais cette propriété seule est insuffisante pour affirmer que la figure 5 est un parallélogramme. Les figures 1 et 3 sont bien des parallélogrammes au regard du mathématicien. La figure 4 aussi puisqu'on affirme que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

L'œil du mathématicien voit même des parallélogrammes là où l'œil du spectateur n'en voit pas.

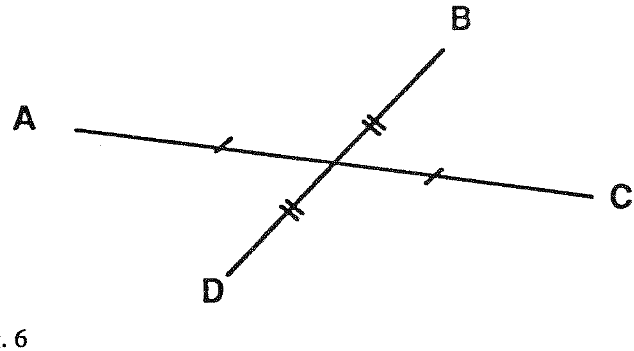


Fig. 6

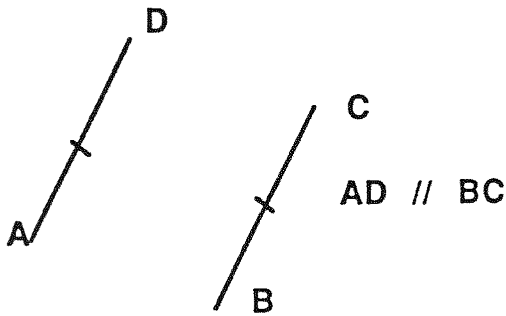


Fig. 7

Le mathématicien va voir que les quadrilatères ABCD sont des parallélogrammes là où le spectateur ne va même pas voir de figures fermées.

Trois évocations différentes de la réalité : celles du spectateur, de l'artiste et du mathématicien

Le spectateur voit et reconnaît les objets à partir de leur apparence. Il peut les nommer. Il voit tout ce qui est explicitement représenté et rien de plus. Un élève disait qu'il s'agissait d'un « œil optique ».

L'évocation de l'artiste-dessinateur dissout les objets représentés et identifiables pour ne voir que des lignes, des espaces positifs et négatifs, des relations spatiales entre des lignes éventuellement prolongées, un équilibre global entre les formes, qu'elles soient figuratives ou non.

L'évocation du mathématicien consiste à ne faire exister un objet qu'en fonction de relations qui peuvent être explicitées. Réciproquement, derrière un objet, il « voit » aussi toutes les relations qui lui sont associées. Les objets réels pour le mathématicien sont toujours des « objets mentaux », résultat d'une construction mentale effectuée à partir de certains éléments que voit aussi le spectateur, mais qui sont évoqués comme exprimant des relations par le mathématicien.

Chacune de ces évocations constitue un codage différent de la même réalité. À partir d'une perception commune, le spectateur, l'artiste et le mathématicien sont plongés dans trois univers évoqués complètement différents. Mais ces trois formes d'évocation ne s'opposent pas. Dans la recherche d'une solution et d'une démonstration, elles vont s'étayer comme nous allons le voir au cours de la démonstration qui va suivre.

Avant de passer à la démonstration, il faut s'assurer que les élèves font bien la distinction entre l'œil du mathématicien et l'œil du spectateur. S'ils ne peuvent faire cette distinction, ils ne pourront comprendre ce que l'on fait quand on fait une démonstration. Il ne s'agit pas de leur faire faire théoriquement cette distinction, mais simplement qu'ils soient capables de la faire sur des exemples comme les exemples précédents.

LA DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME

Nous allons maintenant aborder la démonstration du théorème suivant : La droite supportant le segment passant par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au support du troisième côté et la longueur de ce segment est égale à la moitié de celle du troisième côté.

Les élèves qui n'arrivent pas à démontrer rencontrent en général les deux difficultés suivantes :

– L'objet même de la démonstration leur échappe : puisqu'on voit bien ce qu'on veut démontrer, pourquoi démontrer ?

– Ils ont l'impression que toute démonstration doit être apprise par cœur et qu'ils seraient bien incapables d'en trouver une eux-mêmes.

Nous allons tenter une approche qui voudrait surmonter ces deux difficultés.

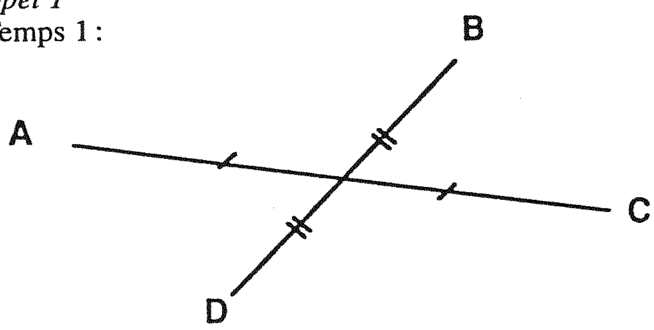
Présentation des rappels

Toute démonstration débute par des « rappels ». Ce sont en général des résultats que l'on utilisera directement dans la démonstration. Dans une démonstration géométrique, il s'agit d'une situation qu'il faudra reconnaître. Étant donné que notre désir est non seulement de démontrer mais d'apprendre à démontrer, nous allons présenter ces rappels dans la forme où nous les rencontrerons au cours de la démonstration. D'autre part nous nous assurerons qu'ils ont bien été évoqués, c'est-à-dire codés mentalement.

Nous ferons donc une présentation « en quatre temps » pour chacun des rappels suivants.

Rappel 1

Temps 1 :



La figure est laissée 15 secondes sur le rétroprojecteur. Les élèves l'observent avec l'intention de la reproduire. Les plus visuels tentent de s'en imprégner globalement. Les plus auditifs en font une description mentale dont ils tenteront de se souvenir.

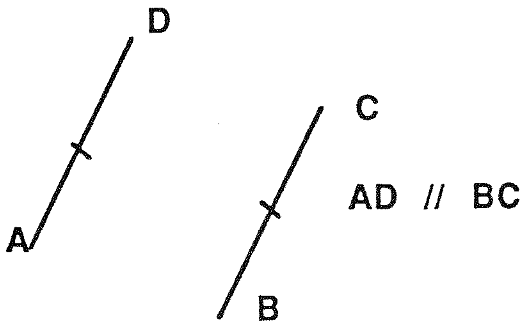
Temps 2 : On masque la figure. Les élèves la reproduisent sur leur cahier.

Temps 3 : On découvre la figure de nouveau, les élèves contrôlent qu'ils n'ont rien oublié.

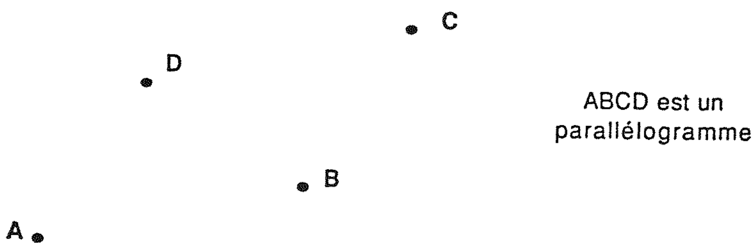
Temps 4 : On décrit verbalement le schéma et on énonce le résultat. Les élèves notent ensuite dans leur cahier.

Rappel 2

On fait la même chose avec la figure :



Rappel 3



Après la présentation en quatre temps de cette dernière figure, on pose la question suivante :

Quelles sont toutes les relations que l'œil du mathématicien voit sur la figure précédente ?

Le mathématicien voit naturellement sur cette figure l'égalité de côtés invisibles pour le spectateur, des côtés parallèles, des diagonales qui se coupent en leur milieu, etc.

Distinction entre situation et action

Les situations (ou états) et les actions ne sont pas gérées mentalement de la même façon, certains élèves ayant beaucoup plus de facilité à gérer les unes ou les autres. Nous distinguerons toujours la situation et les actions.

Nous utiliserons encore le rétroprojecteur et des rabats multiples. Nous présenterons le problème de la façon suivante :

1. Présentation de la situation initiale en « quatre temps ».

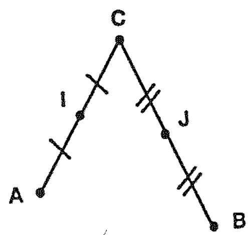


Fig. 1

2. Présentation des actions faites : on trace (IJ) et (AB).

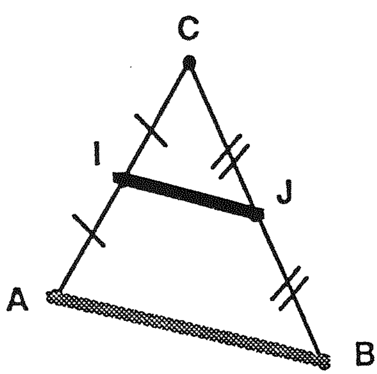


Fig. 2

On demande aux élèves de regarder avec l'œil du spectateur les segments (IJ) et (AB). Ces deux segments apparaissent comme portés sur des supports parallèles. Certains élèves verront que (IJ) semble être la moitié de (AB).

L'œil du mathématicien ne voit rien de tout cela. Nous allons en faire l'hypothèse. Nous allons tenter de le démontrer, donc de rendre visible à l'œil du mathématicien ce que voit l'œil du spectateur. C'est là une première définition de la démonstration en terme d'évocation.

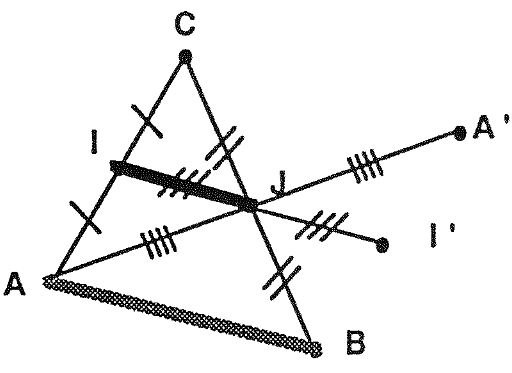
Recherche d'une solution

Que voit l'œil du mathématicien sur la figure 2 ? Rien de plus que le spectateur. Est-ce que les rappels du début peuvent donner quelques idées ? Les points I et J sont bien des points milieux, mais nous sommes loin des figures présentées en rappel. Que faire dans une situation comme celle-ci ? Procéder comme les visuels ont tendance à le faire naturellement, enrichir la figure pour faire apparaître des relations qu'une figure trop pauvre ne laisse pas apparaître.

Comment enrichir une figure ?

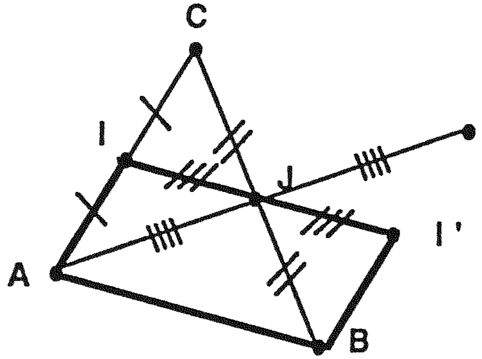
Une façon d'enrichir la figure est de la rendre plus symétrique, ce qui est une façon de faire apparaître de nouvelles relations. Dans le cas de la figure 2, les points I et J sont déjà des points milieux. On peut donc tenter d'enrichir la figure en cherchant les symétriques par rapport à ces deux points.

Plaçons tous les points symétriques des points de la figure par rapport à une symétrie centrale de centre J.



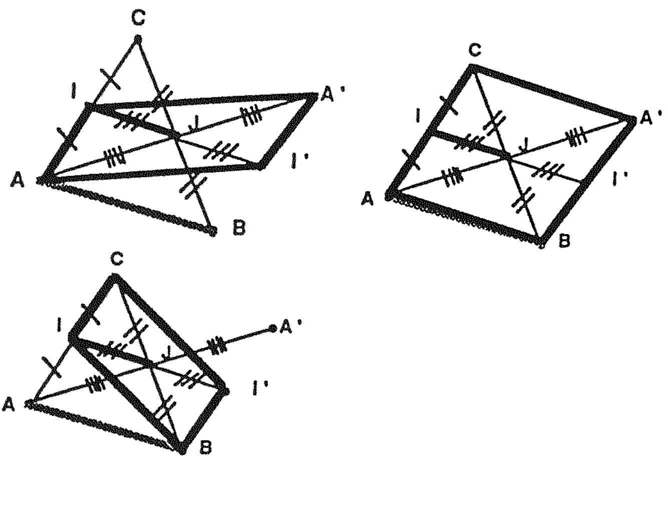
Pour l'œil du spectateur, cette figure paraît plus confuse.

Est-ce que le spectateur ne pourrait pas y voir une figure familière ? Simplement en traçant (BI'), il peut voir un parallélogramme.



Mais ce parallélogramme, l'œil du mathématicien ne peut le voir. Pourtant si l'œil du mathématicien pouvait voir ce parallélogramme, il serait facile pour lui de voir aussi que les supports de (II') et de (AB) sont parallèles et que (IJ) est égal à la moitié de (AB)

L'œil du mathématicien, en revanche, voit 3 parallélogrammes que l'on peut rendre visibles pour un spectateur de cette façon :



Le tracé des symétriques des points de la figure par rapport à une symétrie centrale de centre J a enrichi ce que le spectateur (le parallélogramme II'BC) et le mathématicien voient : les parallélogrammes AIA'I', ACA'B, ICI'B.

Reformulation du problème après l'ajout des points symétriques

Nous n'avons plus affaire au même problème maintenant. Il doit être reformulé. Dans ce cas, ce peut être de la façon suivante : le mathématicien peut-il voir le parallélogramme ICI'C ?

Une façon de poser ce problème visuellement est de rassembler les quatre vues dont nous disposons : les trois du mathématicien et celle du spectateur.

Vues du mathématicien :

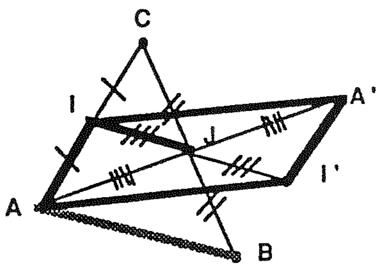


Fig. 1

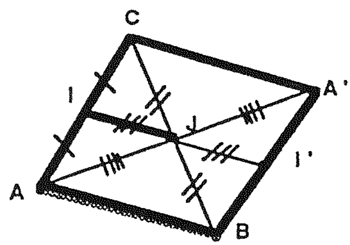


Fig. 2

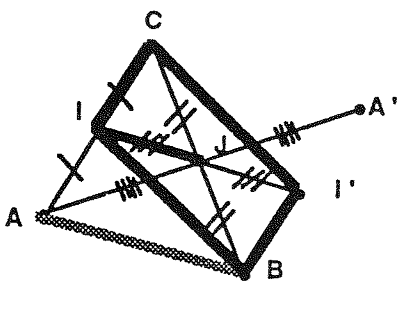


Fig. 3

Vue de spectateur

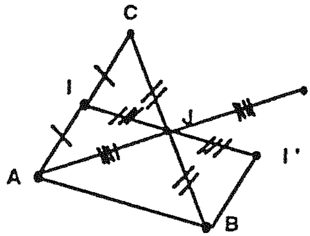
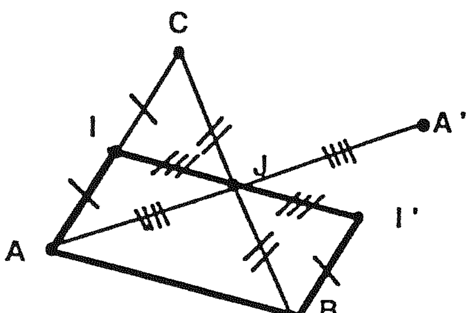


Fig. 4

La vue du spectateur (4) manque d'information pour le mathématicien. Dans quelle mesure les parallélogrammes vus par le mathématicien nous permettent de compléter l'information contenue sur la figure 4 ?

Sur la vue 3, le mathématicien, en voyant ICI'B, voit que (IC) = (BI'), et aussi que BI' // AC.

Plaçons ces informations sur la figure 4 :



AC // BI'

Maintenant le mathématicien voit aussi ce que voyait le spectateur : le quadrilatère AII'B est un parallélogramme.

Le problème est maintenant résolu. Il reste à faire la rédaction de la démonstration. Cette rédaction a pour but de convaincre par des moyens logiques quelqu'un d'autre de la validité du résultat. C'est un problème de communication. Il faut donc que toutes les informations essentielles s'y trouvent, mais qu'il n'y en ait pas d'inutiles.

Le style de rédaction d'une démonstration peut grandement varier selon les exigences de l'enseignant. Cependant on trouve en général :

– la description de la situation de départ ;

– la description des actions faites à partir de cette situation.

Tout cela constitue l'hypothèse.

Ensuite on reprend les étapes successives qui ont conduit à la solution en ne gardant que les parties directement utiles. On va donc omettre tout ce qui a constitué le travail de recherche qui n'a pas un lien direct avec la solution trouvée ; c'est pourquoi il n'est pas facile d'apprendre à démontrer en lisant des démonstrations.

Le moment de la rédaction constitue une vérification logique, déductive et verbale des résultats obtenus. C'est aussi le moment où l'on essaye de transmettre, donc de présenter de façon convaincante ce que l'on a fait.

Démonstration et gestion mentale

1. Le projet

Avant de commencer à démontrer, le projet qui va guider le travail de démonstration doit être le plus précis possible. Les élèves doivent avoir le projet de « faire des mathématiques », donc être conscients de certaines caractéristiques de l'activité mathématique visant à démontrer.

On recherche un moyen, un outil qui permet d'arriver à un résultat. Le moyen ou l'outil doit être le plus général et le plus simple possible. L'outil ou le moyen utilisé a plus d'importance que le résultat obtenu.

On réfléchit sur l'outil ou le moyen lui-même et l'on envisage les points suivants :

– son domaine d'application ;

– sa « fiabilité » ;

– les possibilités de modification de l'outil et les résultats nouveaux que ces modifications permettent d'établir.

Avant de commencer à démontrer, un élève doit se remémorer les points précédents. Il s'agit d'une sorte de conditionnement mental précédant le travail proprement dit.

2. *Les différentes évocations*

On utilise trois évocations différentes :

1. L'évocation du spectateur : il évoque des objets concrets ou des formes à partir de leur apparence. Il reconnaît les objets et les formes qui sont dessinés et peut les nommer.
2. L'évocation du dessinateur ou de l'artiste : il voit « en lui » ce qui n'est pas forcément dessiné. C'est une évocation qui dissout les objets représentés pour faire apparaître des formes dans les espaces négatifs, ou faire des liens entre des formes différentes qui ne sont pas expressément représentées. Les lignes de contour ne font pas que souligner les contours, mais ont des relations entre elles ou leur prolongement. L'évocation du dessinateur ou de l'artiste est souvent globale, muette, esthétique. Elle aboutit à la création d'objets mentaux nouveaux.
3. L'évocation du mathématicien : il ne voit qu'à partir de relations explicitées. Il voit des objets non perçus à condition que les relations entraînant leur existence virtuelle soient perceptibles. Il s'agit bien d'une évocation car « le mathématicien » crée vraiment mentalement les objets non perçus. Il ne s'agit pas de résultats appris, mais bien d'une nouvelle évocation de la réalité. Un résultat mathématique intégré modifie l'évocation du mathématicien. L'évocation du mathématicien s'apparente à une projection d'un objet mental existant dans une réalité concrète.

Lors du processus de démonstration, ces trois évocations entrent en jeu. Une des difficultés est de les reconnaître et de les utiliser à bon escient. Il est inutile de tenter de faire faire une démonstration à un élève qui ne saurait pas distinguer une évocation du spectateur d'une évocation du mathématicien. C'est un préalable à la démonstration.

L'évocation de l'artiste permet d'avoir les idées qui vont orienter la démonstration. Le spectateur va voir avant le mathématicien. Le but de la démonstration est que le mathématicien voit finalement lui aussi ce que le spectateur a vu et que bien souvent l'artiste lui a montré.

Ces trois évocations correspondent à des états mentaux différents. On ne se met pas tout d'un coup à évoquer comme l'artiste alors que l'on évoquait comme le mathématicien. Pouvoir identifier ces évocations par des mots différents permet d'orienter le travail mental nécessaire à la démonstration.

Contrairement à ce que l'on entend parfois, il ne faut pas se défier de ce qu'on voit, on ne démontre pas parce qu'on peut avoir des « illusions d'optique ». Une illusion d'optique n'est que le moment où le spectateur et le mathématicien voient des choses différentes, mais l'évocation du spectateur est aussi vraie que l'évocation du mathématicien ou de l'artiste. Le spectateur et l'artiste voient souvent avant le mathématicien, et le mathématicien ne pourra voir que parce que l'artiste et le spectateur ont vu avant lui. Démontrer, c'est amener le mathématicien à voir lui aussi ce qu'artiste et spectateur ont quelquefois vu avant lui, mais souvent le regard du mathématicien verra ce que ni l'artiste ni le spectateur ne peuvent voir.

Dans le processus de démonstration géométrique, il y a une part visuelle importante : c'est celle rattachée à l'évocation de l'artiste. C'est souvent le moment où l'idée arrive et c'est la partie la plus créative de la démonstration. Les élèves ou les enseignants qui utilisent presque exclusivement des processus verbaux en mathématiques ont l'impression de pouvoir comprendre une démonstration facilement, de pouvoir l'enseigner, mais se croient incapables de la trouver eux-mêmes. Ils ont l'impression de ne pas pouvoir commencer, ou de ne pas avoir la bonne idée ou l'intuition qui met sur la voie. Par contre, ils sont particulièrement brillants pour démonter les rouages logiques du processus déductif. Ils pourraient faire des progrès rapides s'ils développaient en eux l'œil de l'artiste et même l'œil du spectateur. Cela pourra leur paraître difficile au début, car ils se défient beaucoup de ce qu'ils voient et veulent « tout comprendre », tout analyser immédiatement sans se laisser vivre le moment un peu angoissant où la figure se déstructure et les images se reforment dans le silence, où la complexité augmente avant, éventuellement, de se résoudre.

Les visuels au contraire ont l'intuition du résultat. Mais l'œil du spectateur, ou éventuellement de l'artiste, prend toute la place. Prisonnier d'une évocation globale, l'analyse est difficile et la rédaction encore plus. Il leur faut casser l'image globale pour retrouver la séquence logique. On peut leur faire deux suggestions. La première est de toujours mémoriser une image accompagnée d'un commentaire. C'est au moment de la première évocation que l'association de l'analyse et de l'image doit se faire. Il est trop tard au moment de rédiger la démonstration. Si seules les images ont été évoquées initialement, seules les images se présenteront au moment de la rédaction. L'autre suggestion est de mémoriser la figure puis de l'éloigner de son regard. Alors le commentaire vient souvent beaucoup plus facilement ainsi que l'enchaînement des idées. Ces exercices peuvent devenir systématiques pour ceux qui trouvent particulièrement difficile de rédiger une démonstration.

Faisons le point

Apprendre à démontrer, c'est d'abord se donner le projet de faire une démonstration.

La démonstration est une activité mathématique particulière. Or, « l'activité mathématique » a des caractéristiques :

– elle recherche ce qui est simple et général ;

– elle s'intéresse autant à l'outil qui a permis de résoudre un problème qu'à la solution du problème ;

– elle utilise un langage particulier, souvent de nature algébrique, parce qu'il exprime simplement des relations logiques généralisables.

L'activité mathématique utilise successivement plusieurs évocations :

– l'évocation du « spectateur », au premier degré, en P1 [6] peut-on dire ;

– l'évocation dite de « l'artiste » qui tend à dissoudre les formes pour ne plus considérer que des lignes, leur prolongement et leurs relations ;

– l'évocation du mathématicien qui « voit » à partir d'objets mathématiques, concepts qui tendent à se projeter dans la réalité concrète et à lui donner une structure particulière.

Démontrer consiste à rendre visible à l'œil du mathématicien ce qui peut l'être d'autre part à l'artiste ou au spectateur. Démontrer peut aussi consister à voir avec l'œil du mathématicien ce que ni l'artiste ni le spectateur ne peuvent voir.

Le projet de l'élève est donc de se placer dans le cadre d'une « activité mathématique » dont il doit connaître les caractéristiques, et ce projet s'appuie sur la distinction entre l'évocation mathématique et les autres évocations.

Apprendre à démontrer consiste à éduquer le regard du mathématicien, à le distinguer des autres regards. L'évocation mathématique ne se substitue donc pas à d'autres façons d'évoquer. Au contraire, elle s'en nourrit. Les concepts géométriques, les théorèmes n'ont pas de sens s'ils ne débouchent pas sur l'éducation de l'œil du mathématicien, donc sur une évocation nouvelle. Rappelons que le regard du mathématicien peut s'appuyer sur des modalités verbales.

---

6. Le paramètre P1 concerne les objets concrets. Voir les *Objectifs pédagogiques*, *op. cit.*

La dynamique mentale pendant une démonstration part de l'évocation précise de la figure initiale, de la distinction entre ce qui est état et ce qui est construction.

Elle se poursuit par la traduction en terme évocatif du problème à résoudre. Il y a d'un côté ce que le mathématicien voit, de l'autre ce que le spectateur voit. Dans le premier cas, on va trouver des propriétés données, dans l'autre ce qui doit faire l'objet de la démonstration.

On tente ensuite de reconnaître dans la figure donnée des configurations que l'œil du mathématicien sait reconnaître. Ces configurations doivent être mentalement présentes. Dans un cours, ces configurations peuvent faire l'objet de rappels.

Ensuite on tente de se rapprocher de ces configurations en transformant la figure : l'évocation de l'artiste peut être alors d'un grand secours. Certains règles peuvent guider ces transformations (par exemple aller vers une figure plus symétrique). C'est la partie la plus créative de la démonstration, celle où l'on doit s'appuyer sur des évocations autres que mathématiques pour « avoir des idées ».

Le problème initial doit souvent être reformulé en tenant compte des transformations effectuées.

À chaque étape, on fait le bilan : Qu'est-ce que le spectateur voit ? Qu'est-ce que le mathématicien voit ? Est-ce que l'un peut voir aussi ce que l'autre voit ?

Enfin, quand le mathématicien voit ce que le spectateur voyait dès l'énoncé du problème, le problème est résolu. Il reste à passer à la rédaction.

Un des avantages de cette présentation est que les élèves peuvent traduire ce qu'ils doivent faire au cours d'une démonstration en termes de travail mental. C'est en particulier ce que suggère le passage de l'œil du mathématicien à l'œil du spectateur et de l'artiste. La maîtrise du passage de l'œil du mathématicien à l'œil du spectateur est la première condition qui assure la

cohérence logique d'une démonstration. La seconde condition est la précision des évoqués, aussi bien du problème que des figures et que des objets mathématiques. La logique d'une démonstration est donc la conséquence d'un processus évocatif qu'il est possible de décrire aux élèves et auquel ils peuvent s'exercer.

X

Les gestes mentaux de la compréhension en mathématiques

Notre recherche du sens donné aux mathématiques se fonde d'abord sur la distinction entre perception et évocation. Sans évocation, tout objet externe reste à jamais étranger à la conscience. Dès qu'il y a évocation, l'objet interne qui en résulte a déjà la couleur des modalités évocatives. Le sens donné à ce nouvel objet mental se fait par l'établissement de liens avec tout ce qui est déjà chargé de sens. Le langage intérieur établit ces liens, langage particulier à chaque discipline, très différent d'un individu à l'autre, marqué dans son contenu par toute la vie sociale et scolaire et dans sa forme par des habitudes évocatives, plus ou moins visuelles, verbales ou kinesthésiques. Nous avons tenté de décrire comment il se constitue. La nature non naturelle des objets mathématiques oblige à construire pas à pas ce langage intérieur. Nous avons signalé l'importance des représentations mathématiques, à la fois concrétisations de concepts et représentations de situations concrètes.

Comment mettre un élève en position d'évocation? Comment lui faire progressivement construire ce langage intérieur nécessaire à la compréhension des mathématiques ?

Il faut d'abord aller à sa rencontre et trouver le canal de communication au bout duquel la perception pourra se prolonger en évocation. Où situer le point de départ de ce canal ? Dans le temps, l'espace, le ressenti ? Quels moyens d'expression allons-nous choisir : des mots, des images, des gestes ? Le long de quelle chaîne évocative allons-nous évoluer ?

Ensuite, si l'élève, après avoir reconnu le temps de l'évocation, se donne les moyens et l'habitude de sa pratique, il fera le choix de ce canal de communication et l'enseignant n'a pas alors à se muer en un grand communicateur multimédia. Il lui suffit de s'assurer qu'il donne successivement l'information sous deux ou trois formes et qu'il laisse le temps nécessaire à l'évocation. Informé, l'élève reste le principal responsable de sa réussite, ce qui lui laisse aussi le choix de la refuser.

Mais tout cela risque de rester épouvantablement technique et même vide de sens si ce n'est mis en œuvre à travers un projet. C'est le projet qui dirige l'évocation. C'est le projet qui donne le sens. C'est le projet qui active les fonctions cognitives et les coordonnent. C'est le projet qui dirige l'activité intellectuelle.

Chaque élève a une certaine idée de lui-même, un projet d'être ou de devenir et les mathématiques peuvent donner l'impression d'aller à l'encontre de ce projet. Elles sont alors ressenties comme réductrices et contraignantes et même mortifères. Elles ne seront acceptées que si elles peuvent participer à un certain projet d'accomplissement individuel. La recherche des modalités évocatives est l'occasion de préciser ces projets souvent implicites chez les élèves. On peut alors faire le choix d'une approche acceptable qui va transformer les croyances de l'élève sur la nature des mathématiques. Il ne faut pas pour autant tomber dans la démagogie, mais au contraire se rapprocher de ce que sont bien souvent les mathématiques pour celui qui les produit. Le respect de la particularité des trois niveaux rencontrés dans cette discipline, celui des situations concrètes et des représentations externes, celui de la langue, celui des objets mathématiques, chacun ne pouvant se réduire au précédent mais s'enrichissant à son contact, assure déjà que l'on se situe bien à l'intérieur de l'activité mathématique.

Certains croient qu'il leur faut abandonner ce qu'ils sont pour devenir un automate ou un perroquet. D'autres croient qu'il faut tout réinventer et devenir une sorte de magicien. Les uns et les autres se trompent, ils n'ont pas le projet de faire des mathématiques, mais un autre, erroné, qui les éloigne de tout espoir de réussite. C'est pourquoi un des buts de ce livre fut de décrire « le projet de faire des mathématiques » pour le rendre le plus explicite possible et donner à chacun la possibilité de l'adapter à ce qu'il est.

L'intervention pédagogique repose sur le rôle du projet dans la vie mentale. Pour faire des mathématiques, il faut avoir le projet correspondant, d'où la nécessité d'enseigner l'activité mathématique autant que les concepts. Mais plus simplement, toute présentation doit correspondre à un projet pour l'élève, projet plus ou moins immédiat : projet d'évoquer une figure, de la commenter, de mémoriser, d'imiter un comportement, de retrouver une configuration déjà vue, d'insérer une nouvelle connaissance dans un champ plus large... Un cours est une succession de projets précis à réaliser, projets générateurs d'activité mentale.

Quand le projet de faire des mathématiques se trouve en accord avec l'idée qu'on a de soi-même, quand les projets ponctuels structurant un cours s'insèrent dans les projets précédents et correspondent aux habitudes évocatives, il y a ce qu'on appelle la « motivation ». Mais tout cela ne suffit pas pour donner une compréhension des mathématiques en terme de gestion mentale. Il reste à décrire les gestes mentaux à accomplir. En rester au niveau de l'évocation sans plus de précision risquerait d'induire les élèves en erreur en confondant mémorisation et compréhension

Le geste mental est un outil précieux parce qu'il induit un type précis d'activité mentale. Rappelons la définition que nous en donnons : Effectuer un geste mental consiste à faire subir, consciemment et dans un but précis, un certain traitement à des représentations mentales.

Si l'on peut décrire la compréhension en mathématiques en fonction de gestes mentaux à accomplir, on éclaire un processus mystérieux et on fournit des moyens d'obtenir cette compréhension. On peut même s'entraîner à accomplir ces gestes comme on peut s'entraîner à améliorer une performance physique. Il faut se limiter à un nombre peu important de gestes si l'on veut être efficace. Ces gestes seront donc assez globaux. Ils mettront en jeu et assureront la coordination de plusieurs fonctions cognitives. Ils devront être décrits clairement pour qu'un élève sache comment faire mentalement pour les exercer, même s'ils sont définis non pas par leurs modalités (description explicite), mais par le résultat qu'on attend d'eux (description implicite).

Les six gestes mentaux qui nous paraissent les plus importants à développer sont les suivants :

1. Intérioriser : c'est-à-dire se donner un codage mental des images, des gestes, des mots, des mouvements vus ou entendus pour pouvoir les reproduire.

Le geste mental 1 assure l'intériorisation des événements extérieurs : énoncés, images, déplacements, actions. Ses modalités peuvent être fort différentes d'un individu à l'autre : c'est l'image, le son, le ressenti, le mouvement que certains élèves vont privilégier pour reproduire les événements extérieurs. Ce geste mental assure que l'évocation de ce qui a été perçu s'est bien effectuée. Il peut déboucher sur la mémorisation simple, mais est aussi indispensable à toute compréhension ultérieure car il provoque l'apparition de l'objet évoqué à partir duquel s'effectuera toute activité de compréhension ultérieure

Il constitue une forme d'attention particulière, l'attention n'étant pas forcément tourné vers la reproduction. La reproduction est un critère de réussite de ce geste mental tout en constituant un projet qui va le provoquer.

Ce geste mental s'applique aussi aux comportements, aux stratégies. Ceux qui réussissent bien dans la résolution des problèmes sont aussi de bons imitateurs qui apprennent en observant les autres résoudre des problèmes, que l'évocation se fasse visuellement ou verbalement.

2. Personnaliser la représentation: représenter (ou se représenter) en traduisant dans une forme personnelle ce qui est intériorisé.

Le geste mental 2 consiste à donner une traduction personnelle aussi bien dans ses modalités (l'image, le son, le ressenti, le mouvement) que dans la forme. Ce geste mental donne un sens personnel à ce qui peut être reproduit grâce au geste mental 1. Faire ce geste mental consiste à tisser des liens entre ce qui a déjà un sens avec ce qui est nouveau. C'est une description faite à partir du langage intérieur. Le geste mental 1 doit le précéder pour s'assurer que la situation externe a bien été évoquée. Certaines de ces traductions personnelles peuvent être des associations plus ou moins farfelues, des métaphores, des comparaisons.

Ce geste va charger de sens la première évocation. Ce geste oblige souvent à remonter jusqu'à ce qui a un sens en soi, ce qui est quelquefois très loin. Ce peut être aller jusqu'au sens premier de la multiplication même si on se trouve en terminale et que l'on doive résoudre un problème de combinatoire. Une conséquence de ce geste mental peut être une formalisation complètement nouvelle du problème.

Ces deux gestes sont indispensables pour aller plus loin. Ils restent tout aussi importants à des niveaux plus élevés. Avant de comprendre un théorème, il faut d'abord donner un sens à chaque terme et le rattacher à ce qu'on connaît avant d'entreprendre la lecture de la démonstration. Les difficultés de compréhension de cette démonstration proviennent souvent des faux sens, de mauvaises interprétations ou d'interprétations incomplètes résultant de l'application insuffisante des gestes 1 et 2. La solution à un problème ne se présente que si toutes les données du problème ont été intériorisées et personnalisées. Les contraintes du problème sont alors complètement évoquées. L'essentiel des stratégies de résolution de problèmes consiste à pratiquer les gestes 1 et 2.

3. Mettre en évidence des invariants, ce qui implique une comparaison à partir de ce qui est commun et de ce qui est différent dans deux situations. Ces situations peuvent être de natures verbale, visuelle, dynamiques ou non.

Le geste mental 3 est nécessaire pour assurer la formation de concepts par le regroupement de propriétés diverses sous un même nom. En mathématiques, nous croyons que cette définition du concept est insuffisante pour le rendre actif et en faire un outil de résolution de problèmes. Le geste mental 5 est indispensable pour assurer cette dynamique.

Il faut souvent un entraînement particulier à ce geste mental, le travail de recherche d'invariants devant se faire sur des objets évoqués tout en respectant les différences individuelles. Représenter ce qui est invariant, soit visuellement soit verbalement, est indispensable. L'entraînement à ce geste passe donc par la recherche et l'expression de ce qui est semblable et de ce qui est différent, quel que soit l'ordre dans lequel on fait cette recherche.

4. Traduire d'une forme dans une autre : traduire les propriétés arithmétiques sous forme géométrique ou réciproquement, traduire des énoncés sous une forme imagée, schématique ou arithmétique sont quelques exemples de cette traduction. Il s'agit aussi d'exprimer un terme mathématique nouveau en fonction de termes connus, ou de reformuler différemment une phrase mathématique.

Le geste mental 4 met en place un processus particulièrement efficace en mathématiques. Ce processus consiste à exprimer autrement, mais d'une façon équivalente. C'est ce que l'on fait déjà en résolvant une équation où chaque transformation de l'équation est une autre équation plus facile à résoudre, mais cependant équivalente. C'est en exprimant de façon analogue mais sous une autre forme que l'on met en évidence des propriétés, que l'on fait des rapprochements et que l'on trouve des solutions.

Ce geste demande l'exercice du geste précédent. Une transformation n'a d'intérêt que si on la considère sous le double point de vue de ce qui est transformé et de ce qui est conservé. Avant de produire de telles transformations, il faut en avoir rencontré et s'être exercé à en isoler les invariants.

Souvent la transformation est effectuée pour se rapprocher d'une forme connue. Pour trouver une transformation, il faut donc avoir en tête la forme dont on part, la forme vers laquelle on se dirige et les éléments que l'on désire conserver. Il reste alors à inventer la transformation, invention qui ne peut se faire sans l'évocation des éléments précédents et sans avoir en tête des exemples de telles transformations.

Ces traductions peuvent mettre aussi en jeu des représentations personnelles qui ne sont pas forcément considérées comme mathématiques.

La transformation d'une expression mathématique assure aussi ce qu'on pourrait appeler la « compréhension linguistique » des mathématiques. Il assure le développement cohérent de la langue mathématique.

5. Projeter des structures connues dans des situations nouvelles

Ce geste permet de reconnaître dans une situation nouvelle une structure ou une propriété mathématique intériorisée. Ce geste de « projection » va faire du concept un « objet mathématique » tendant à se projeter dans une réalité nouvelle. Au cours de projections successives, l'objet mathématique va se complexifier et se transformer.

Un élève à qui l'on a présenté la division en association avec un processus de partage va « reconnaître » la division dans un processus de regroupement. Il va le faire sans qu'on le lui explique, alors qu'il n'avait pas *a priori* de connaissances lui permettant de reconnaître une division dans le regroupement. Il a donc considéré le regroupement comme une situation voisine, sous certains aspects, de la situation de partage et a « vu » que l'opération division pouvait aussi être associée à cette nouvelle situation. Nous dirons alors que la division a été « projetée » dans une nouvelle situation, et que cette projection a permis de donner un sens à cette situation. La projection de la division dans cette situation nouvelle a aussi modifié et élargi le sens donné à la division. En se projetant, le concept de division a donc évolué.

Voici un autre exemple : supposons que prendre une fraction d'une certaine grandeur soit une opération définie comme la suite d'une division et d'une multiplication. Devant une situation où l'on colore 3 éléments sur 5, un élève peut projeter le concept de fraction reposant sur l'algorithme précédent dans cette situation nouvelle. Pour faire cette projection, le concept de fraction s'enrichit et incorpore la notion de « rapport » à ce qui n'était au départ qu'un « calcul ».

La projection nécessite un enrichissement personnel d'une notion déjà acquise dans un certain cadre pour l'adapter à un cadre nouveau. Les deux cadres ne sont pas strictement équivalents. Les concepts évoluent en partie par projections successives.

La résolution d'un problème se fait souvent par projection d'un objet mathématique intériorisé sur une situation nouvelle. Cette projection va permettre la résolution du problème. Il est aussi l'outil des découvertes en mathématiques : une situation confuse devient soudain limpide parce qu'on vient d'y projeter une structure mathématique qui transforme l'évocation qu'on en fait. C'est un geste fondamental de compréhension. Si la réussite de la projection illumine tout d'un coup une situation confuse, elle procède aussi d'essais infructueux. Pour s'entraîner à projeter, il faut avoir en tête un objet mathématique, donc un objet mental. La situation concrète sur laquelle la projection doit se faire doit, elle aussi, être évoquée dans tous ses détails. Pour que la projection soit possible, il faudra accepter de faire évoluer un peu l'objet mental.

Le matériel didactique joue ce rôle. Il est un lieu de projection. Certains exercices ont la même fonction.

Le geste de projection est un geste essentiel dans la compréhension des mathématiques. Il assure l'évolution des concepts et la résolution d'une catégorie importante de problèmes. Sans entraînement particulier, il peut paraître mystérieux parce qu'il ne se borne pas à reproduire ce qui est déjà fait, mais il est créateur de sens.

De nombreux enfants en difficulté ont une conception totalement passive des mathématiques. Ils peuvent résoudre des exercices mais jamais de problèmes. Ils ne font jamais de projections telles que nous venons de les décrire. Les notions mathématiques qu'ils utilisent sont figées et ne peuvent s'appliquer que dans des cadres déjà rencontrés. Par contre, un concept mathématique tend à se projeter de cette façon. C'est dans cette mesure qu'il devient efficace et nous permet de résoudre des problèmes nouveaux. C'est par la projection que se crée une dynamique bien particulière aux mathématiques : la tendance à élargir et à unifier sans cesse le champ de ses applications.

Produire des concrétisations, avec le sens que nous avons donné à ce mot, est un premier entraînement à la projection. Savoir que les objets mathématiques ne sont pas figés mais en évolution constante est une condition nécessaire à la projection. Reconnaître une notion mathématique dans une situation nouvelle, sans explication d'un tiers mais par évocation de plus en plus précise de la réalité et de l'idée mathématique jusqu'à ce que le lien apparaisse, constitue un entraînement direct à la projection.

6. Anticiper les étapes à franchir et la forme d'un résultat

Il s'agit de prévoir quelques étapes de la résolution d'un problème avant de le faire et en particulier de prévoir la forme de la solution que l'on cherche à obtenir. Il faut aussi « s'imaginer » les formes possibles du résultat et agir en conséquence.

Sans une telle anticipation, il n'y a pas d'organisation cohérente du travail de recherche dans la solution d'un problème. Les élèves en difficulté en mathématiques partent « au hasard », ce qui donne souvent une grande impression d'incohérence dans leur comportement mathématique. Ce geste se développe évidemment avec l'habitude de résoudre des problèmes, à condition de revenir sur le problème résolu en tentant de mémoriser une « bonne façon de faire » avec le projet de la réutiliser le moment venu. Au moment de la résolution du problème, il faut s'arrêter et faire un inventaire des situations analogues à celle dans laquelle on se trouve. S'ensuit l'évocation d'un certain nombre de possibilités qui vont se traduire en actions virtuelles : si je fais telle chose, voici ce qui va se passer. Ces actions virtuelles vont déterminer le choix d'une stratégie de résolution.

Chacun des six gestes précédents doit se constituer en projet. Chaque élève doit apprendre à le décrire, à prendre conscience de ses modalités particulières et à le mettre consciemment en œuvre. Ces gestes ont été décrits plus complètement dans les chapitres qui précèdent. Leur liste n'est pas limitative et ils peuvent se recouper dans certains de leurs aspects. Ils nous semblent cependant les gestes mentaux essentiels à effectuer pour affronter la complexité et apprendre à comprendre les mathématiques. Ils s'adressent à l'organisateur, cette partie de nous qui gère une autre partie de nous-mêmes, l'exécutant.

Apprendre les mathématiques peut devenir une œuvre de conscience, conscience de nos moyens d'apprendre, conscience de nos projets, conscience des gestes mentaux à effectuer, conscience de la nature des mathématiques que l'on veut acquérir. Pour cela, il faut accepter la complexité de l'activité mathématique, et tenter de ne rien cacher de la variété des moyens de son appropriation. Apprendre les mathématiques est un projet dans lequel on n'est pas obligé d'abandonner l'essentiel de sa personnalité mais au contraire la développer et en faire l'instrument de sa réussite. Il y a la pédagogie. Il y a la psychologie. Il y a les multiples théories de l'apprentissage qui ne deviennent bien souvent que des *a priori*. Il y a surtout l'éternelle question que se pose le professeur toujours étonné du regard de son élève : mais qu'est-ce qui se passe dans sa tête ?

Conclusion

Un principe fondamental en gestion mentale est la distinction entre perception et évocation. Si l'on place l'évocation au centre des préoccupations pédagogiques, on doit d'abord tenir compte de l'élève, non pas l'élève générique, mais de celui qui est là avec ses particularités, son histoire et ses possibilités qu'une certaine forme de dialogue peut nous révéler. La recherche des habitudes évocatives, quand elle est menée sans *a priori*, est un terrain de rencontre idéal entre l'adulte et l'élève. Les adolescents, quelquefois si difficiles à rejoindre, jouent souvent le jeu avec passion. Rappelons qu'il ne s'agit pas de classer, mais de révéler des habitudes mentales qui constituent autant de moyens d'apprendre.

Mais l'analyse des habitudes évocatives n'est qu'un aspect du problème. L'activité mentale dépend aussi de la nature de ce que l'on apprend. On n'apprend pas les mathématiques comme le français ou la physique, ni la géométrie comme l'algèbre. Il faut donc analyser les concepts à acquérir du point de vue de l'activité mentale. C'est ce que nous avons fort modestement tenté de faire pour certains d'entre eux, à partir des représentations que l'on peut s'en donner, des gestes mentaux qu'il faut effectuer pour se les approprier, et du projet souvent implicite poursuivi à travers l'activité mathématique. Pour cela nous avons dû parler de « chaînes évocatives », de « canaux de communication », de « représentations mathématiques », de « langage intérieur mathématique » ou « de regard du mathématicien » et de quelques « gestes mentaux » particuliers pouvant être associés à la compréhension mathématique, tout cela dans le but de donner des descriptions les plus opératoires possible de l'activité mentale en mathématiques.

Tenter de telles descriptions est une tâche ambitieuse, mais qui peut se révéler remarquablement efficace quand elles se font projets dans l'esprit de l'élève. Cette voie est jusqu'à maintenant peu explorée. Les concepts rattachés à la gestion mentale sont à la fois assez souples et précis pour avancer dans cette direction. Nous ne sommes qu'au début du chemin.

Bibliographie

APÉRY R. *et al.*, *Penser les mathématiques,* Points Sciences, Le Seuil, Paris, 1982.

BANDLER, GRINDER, *Reframing : neuro-linguistic programming and the transformation of meaning,* Real People Press, Moab, USA, 1982.

BARUK S., *Échec et maths*, Seuil, Paris, 1973.

– *Fabrice ou l'école des mathématiques*, Seuil, Paris, 1977.

BEDNARZ N., GRANIER C., *Construction des savoirs : obstacles et conflits,* Agence d'Arc, Montréal, 1989.

BRESSON F., *Les fonctions de représentation et de communication, in* J. Piaget, P. Mounoud, J. P. Bronkard (Eds), *Psychologie,* Encyclopédie de la Pléiade, Gallimard, 1987.

BRISSIAUD R., *Comment les enfants apprennent à calculer,* Éditions Retz, 1989.

BRITT-MARI B., *L'apprentissage de l'abstraction*, Éditions Retz, Paris.

BRUNER J. S., GOODNOW J., AUSTIN G., *A study of thinking,* Wiley, New York, 1956.

CARRIER C., RAE JOSEPH M., KREY L., LACROIX, *Supplied visuals and imagery instructions in field independant and field dependant children's recall,* University of Minnesota, Minneapolis.

CAYROL, BARRERE, *La programmation neuro-linguistique* ESF Editeur, Paris, 1990.

LE CHEVALIER S., *L'enfant et la concentration*, Le Courrier du livre, Paris, 1987.

CORNEAU G., *Père manquant et fils manqué*, les Éditions de l'homme, Montréal, 1989.

DELORME J., RICHARD J.-F., *Étude de la compréhension de problèmes arithmétiques chez des enfants en difficulté à l'école élémentaire,* MIR, 1987.

DENIS M., Les images mentales, PUF, Paris, 1979.

– *Images et cognition,* PUF, Paris, 1989.

FEUERSTEIN R., *Instrumental enrichissement,* Scott, Foresman and Co, USA, 1980.

GONTHIER J., *Dessin et dessein*, ESF éditeur, Paris, 1990.

GRINDER, BANDLER, *The structure of magic,* Palo Alto (Californie), Science and Behavior Books, vol. I et vol. II, 1976, 1985.

LAFONTAINE R., LESSOIL B., *Êtes-vous auditif ou visuel ?*, Les Éditions Québecor, Montréal, 1990.

DE LA GARANDERIE, *Les profils pédagogiques*, Centurion, Paris, 1980.

– *Le dialogue pédagogique avec l'élève*, Centurion, Paris, 1984.

– *Comprendre et imaginer,* Centurion, Paris, 1987.

– *Défense et illustration de l'introspection,* Centurion, Paris, 1989.

MINSKY M., *The society of mind*, Simon and Schuster, New York, 1985.

NIMIER J., *Les modes de relations aux mathématiques,* Méridien Klincksieck,Paris, 1988.

– *Entretiens avec des mathématiciens,* IREM de Lyon, Lyon, 1989.

PAIVIO A., *Imagery and verbal process,* Wiley, New York, 1971.

PRESSLEY, *Mental imagery helps eight year old remember what they read,* Journal of educational psychology, 1976, p. 355-359.

PLANCHON H., *Réapprendre les maths,* ESF, Paris, 1989.
RICHARD J.-F., *L'attention,* PUF, Paris, 1980.
– *Les activités mentales,* Armand Colin, Paris, 1990.
RICHARD *et al., Traité de psychologie cognitive,* Dunod, Paris, t. I, II, III.
RICHARSON A., *Mental imagery,* London, 1969.
ROBBINS A., *Pouvoir illimité,* Robert Laffont, Paris, 1986.
SCHNEUWLY, BRONCKART, *Vygotsky aujourd'hui,* Delachaux et Niestlé, 1985.
SHEPPARD R.N., METZLER J., « Mental rotation of three dimensional objects », *Science* 171, 701-703, 1971.
SIEGLER R.S., RICHARDS D.D., « Development of time, speed and distance concepts », *Developmental psychology,* 15, 288-298, 1979.
SIMON D.P., SIMON H.A., *Individual difference in solving problem,* R.S. Seigler (Ed.), *Children thinking : what develops ?,* 109-149, Hillsdale, N.J. Erlbaum, 1978.
SMITH S.B., *The great mental calculators,* Colombia University Press, 1983.
TARDIF J., *Pour un enseignement stratégique,* Les Éditions logiques, Montréal, 1992.
THORNDYKE P.W., « Conceptual complexity and imagery in comprehension and memory », *Journal of verbal learning and verbal behavior,* 14, 359-369, 1975.
VYGOTSKY, *Pensée et langage,* Messidor/Éditions sociales, 1985.
WHEATLEY, MITCHELL, FRANKLAND, KRAFT, « Hemispheric specialization and cognitive development : implications for mathematics education », *Journal for research in mathematics education,* 1978.
WILLIAMS L., *Deux cerveaux pour apprendre*, Les Éditions d'organisation, Paris, 1983.
WINN W., « Visualization in learning and instruction : a cognitive approach », *Educational communication and technology journal*, 1982.

Child Development, *Neuropsychology of early-treated phenylketonuria : specific executive function deficits,* Marilyn C. Welsh, Bruce F. Pennington and Sally Ozonoff, Bobbye Rouse, Edward R. B. McCabe, 1990, p. 1698-1712.

Table des matières

L'évocation doit s'appliquer sur des objets qui donnent un sens à la discipline étudiée. Les mathématiques ont des caractéristiques propres qu'il faut respecter. Nous avons tenté de décrire les objets mathématiques en terme de gestion mentale.

Le langage intérieur mathématique est un langage personnel qui sert à associer les objets mathématiques et les situations de problèmes. Il ne peut être développé qu'à l'école et est indispensable pour utiliser les mathématiques. Les opérations arithmétiques nous servent de prétexte pour caractériser ce langage intérieur mathématique.

Dans la perspective ouverte par les travaux d'Antoine de La Garanderie sur la gestion mentale, Alain Taurisson développe une réflexion sur les modes d'acquisition du langage mathématique.

Pour trop d'élèves, l'univers des mathématiques est celui de l'arbitraire et de l'absurde. Or, nous dit l'auteur, il est possible de donner un sens à l'activité mathématique.

Alain Taurisson propose donc une pédagogie de l'intuition mathématique. Loin d'être innée, celle-ci suppose que l'enfant se représente les objets mathématiques. Guidé par le pédagogue, il prendra peu à peu conscience des gestes mentaux qui lui permettront de démontrer un théorème ou de résoudre un problème d'algèbre. «Ces gestes mentaux, écrit Antoine de La Garanderie dans sa préface, sont les vrais chemins de l'intuition mathématique.» En se les appropriant, l'enfant ne *fait* pas des mathématiques, il *devient* mathématicien.

140 FF
9 782227 125315